Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)

5. Arbitragefreiheit und äquivalente Martingalmaße

Martingalmaß

Sei Ω endlich und $\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. $(\mathcal{F}_t)$ sei eine Filtration mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_T = \mathcal{F} =$ die Potenzmenge von Ω.

Definition 1

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t))$ heißt *Martingalmaß* oder *risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls die diskontierten Preisprozesse $(\tilde{S}_t^k)$ für alle $k = 1, \ldots, d$, $(\mathcal{F}_t)$-Martingale bezüglich $\mathbb{Q}$ sind.

Martingalmaß

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &:= \{\mathbb{Q} \text{ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{Q} \text{ ist ein Martingalmaß}\}, \\
\mathcal{M}^\star &:= \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M} : \mathbb{Q} \text{ ist äquivalent zu } \mathbb{P}\} \\
&= \{\mathbb{Q} \in \mathcal{M} : \mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0 \ \forall \omega \in \Omega\}.
\end{aligned}$$

Martingalmaß CRR-Modell

Wir betrachten zunächst das Cox-Ross-Rubinstein-Modell unter der No-Arbitrage-Bedingung $d < 1 + r < u$. Dort hatten wir definiert:

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) := \mathbb{Q}\big(\{(y_1, \ldots, y_T)\}\big) = q_{y_1} \cdots q_{y_T},$$

wobei $\omega = (y_1, \ldots, y_T) \in \{u, d\}^T$ und

$$q_y = \begin{cases} q & \text{falls } y = u \\ 1 - q & \text{falls } y = d \end{cases} \quad \text{mit } q := \frac{1 + r - d}{u - d}$$

und $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \ldots, Y_t) = \mathcal{F}_t^S$.

Martingalmaß CRR-Modell

Theorem 2

Im Cox-Ross-Rubinstein-Modell gilt unter (NA):

a) $(\tilde{S}_t)$ *ist ein* $\mathbb{Q}$*-Martingal, d.h.* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.

b) $\mathbb{Q}$ *ist das einzige Martingalmaß, d.h.* $|\mathcal{M}| = 1$.

c) $\mathbb{Q}$ *ist äquivalent zu* $\mathbb{P}$.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{Y_{t+1}S_t}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{S_t}{B_{t+1}}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \\
&= \frac{S_t}{B_{t+1}}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{t+1}] = \frac{S_t}{B_t}\cdot\frac{1}{1+r}\big(uq + d(1-q)\big) = \tilde{S}_t.
\end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass $\frac{1}{1+r}\big(uq + d(1-q)\big) = 1$.
b) Notwendigerweise muss $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = 1$ gelten. Dafür gibt es nur eine Möglichkeit.
Für c) beachte, dass $q \in (0,1)$. □

Überlegungen in allgemeinen Märkten

Theorem 3

Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ *und* $\varphi = (\alpha, \beta)$ *eine selbstfinanzierende Handelsstrategie.*
Dann ist der diskontierte Vermögensprozess $\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t}\right)$ *ein* $\mathbb{Q}$*-Martingal.*

Beweis

Da φ selbstfinanzierend ist, gilt

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + G_t^\alpha = V_0^\varphi + \sum_{k=1}^{d} \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1}^k \Delta \tilde{S}_n^k.$$

Also ist $\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t}\right)$ eine Summe von Martingaltransformationen der $\mathbb{Q}$-Martingale $(\tilde{S}_t^k)$ und damit ebenfalls ein $\mathbb{Q}$-Martingal. $\square$

Charakterisierung $\mathcal{M}$

Theorem 4

Sei $\mathbb{Q}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Dann gilt

a) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow$ *für alle* $\alpha \in \mathcal{A}$ *gilt:* $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G_T^\alpha] = 0$.

b) $\mathcal{M}^\star \neq \emptyset \Rightarrow$ *(NA).*

Beweis

Teil a) " $\Rightarrow$ ":
Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Es folgt: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha_{t-1} \cdot \Delta\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$ für $t = 1, \dots, T$.
Wegen

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha_{t-1} \cdot \Delta\tilde{S}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\alpha_{t-1} \cdot \Delta\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}]] = 0$$

folgt damit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G_T^\alpha] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\sum_{t=1}^{T} \alpha_{t-1} \cdot \Delta\tilde{S}_t\right] = 0,$$

was der Behauptung entspricht.

Beweis

Teil a) " $\Leftarrow$ ": Sei $n \in \{1, \dots, T\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$ und $B \in \mathcal{F}_{n-1}$.
Definieren damit Handelsstrategie $\alpha = (\alpha_t)$:

$$\alpha_{n-1}^k := 1_B, \quad \alpha_t^j = 0 \text{ für } (j,t) \neq (k, n-1).$$

Dann ist $\alpha \in \mathcal{A}$. Außerdem gilt $G_T^\alpha = 1_B \Delta \tilde{S}_n^k$, und

$$0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[G_T^\alpha] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[1_B \Delta \tilde{S}_n^k].$$

Da 1_B auch $\mathcal{F}_{n-1}$-messbar ist, gilt

$$0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\mathbb{E}_\mathbb{Q}[1_B \Delta \tilde{S}_n^k | \mathcal{F}_{n-1}]] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[1_B \, \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\Delta \tilde{S}_n^k | \mathcal{F}_{n-1}]].$$

Wähle $B := \{\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\Delta \tilde{S}_n^k | \mathcal{F}_{n-1}] > 0\}$ bzw. $B := \{\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\Delta \tilde{S}_n^k | \mathcal{F}_{n-1}] < 0\}$.
Dann ist $B \in \mathcal{F}_{n-1}$ und $\mathbb{Q}(B) = 0$, d.h., für alle n und k gilt

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[\Delta \tilde{S}_n^k | \mathcal{F}_{n-1}] = 0, \quad \mathbb{Q} - f.s.,$$

also $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.

Beweis

Teil b):
Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$. Wegen (NA) gilt für alle selbstfinanzierenden $\varphi = (\alpha, \beta)$:

$$G_T^\alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad G_T^\alpha \equiv 0.$$

Aus Teil a) folgt: $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[G_T^\alpha] = 0$ für alle $\alpha \in \mathcal{A}$. Ist aber $G_T^\alpha \geq 0$ muss hier $G_T^\alpha \equiv 0$ sein. $\square$

Trennungssatz

Definition 5
$K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvex*, falls $\forall x, y \in K$, $\lambda \in (0,1)$ gilt: $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$.

Theorem 6
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, abgeschlossen und konvex und $Z \notin K$. Dann gibt es eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und ein $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) \leq \gamma \text{ für alle } x \in K \text{ und } f(Z) > \gamma.$$

Beweis

Sei o.B.d.A. $Z = 0$ und betrachte

$$B_r := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}.$$

Wähle r so, dass $K \cap B_r \neq \emptyset$.Sei $x^* := argmin_{x \in K \cap B_r} \|x\|$. Wegen $0 \notin K$ ist $\|x^*\| > 0$. Sei nun $x \in K$ beliebig. K konvex $\Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)x^* \in K$ für alle $\alpha \in [0,1]$ und nach Definition von x^*:

$$\begin{aligned}
& \|\alpha x + (1-\alpha)x^*\|^2 \geq \|x^*\|^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \big(\alpha x + (1-\alpha)x^*\big) \cdot \big(\alpha x + (1-\alpha)x^*\big) - x^* \cdot x^* \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha^2 \big(x - x^*\big) \cdot \big(x - x^*\big) + 2\alpha(x - x^*) \cdot x^* \geq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \alpha \big(x - x^*\big) \cdot \big(x - x^*\big) + 2(x - x^*) \cdot x^* \geq 0.
\end{aligned}$$

Mit $\alpha \downarrow 0$, folgt für $x \in K$: $(x - x^*) \cdot x^* \geq 0$, d.h.

$$-x \cdot x^* \leq -(x^*) \cdot x^* < 0, \quad x \in K.$$

Wähle $\gamma := -x^* \cdot x^*$ und $f(x) = -x \cdot x^*$, so folgt die Behauptung. $\square$

Vorbereitung des ersten Hauptsatzes

Da Ω endlich ist, können wir annehmen, dass $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$.
Interpretiere eine ZV X auf Ω als Vektor, also $(X(\omega_1), \dots, X(\omega_m)) \in \mathbb{R}^m$.
Für $X(\omega_i)$ schreibe auch X_i. Betrachte

$$L := \left\{ X \in \mathbb{R}^m : X_i = G_T^\alpha(\omega_i) \text{ für } i = 1, \dots, m \text{ und } \alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

Da G_T^α linear in α ist, ist L ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^m$, der abgeschlossen und konvex ist. Weiter sei

$$C := \left\{ X \in \mathbb{R}^m : X \leq Y \text{ für ein } Y \in L \right\}.$$

Die Menge C ist ein abgeschlossener und konvexer Kegel.
Der Markt ist arbitragefrei $\Leftrightarrow L \cap \mathbb{R}_+^m = \{0\}$ bzw. $C \cap \mathbb{R}_+^m = \{0\}$.

Vorbereitung des ersten Hauptsatzes

Lemma 7

Für jedes $Z \notin C$ gibt es ein $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] > 0$.

Beweis

C abgeschlossen, konvex und $Z \notin C \Rightarrow$ (Trennungssatz) $\exists\, f(x) = a \cdot x$ und $\gamma \in \mathbb{R}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{m} a_i H_i \le \gamma < \sum_{i=1}^{m} a_i Z_i, \quad \text{für alle } H \in C.$$

Aus $0 \in C$ folgt insbesondere, dass

$$0 < \sum_{i=1}^{m} a_i Z_i.$$

Mit $H \in C$ ist auch $nH \in C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da C ein Kegel ist. Damit gilt

$$n \sum_{i=1}^{m} a_i H_i \le \gamma.$$

Da $\gamma < \infty$ folgt, dass $\sum_{i=1}^{m} a_i H_i \le 0$. Also können wir $\gamma = 0$ wählen.

Beweis

Betrachte nun $1_{\{\omega_i\}}$. Es ist $-1_{\{\omega_i\}} \le 0 \le G_T^0$. Also ist $-1_{\{\omega_i\}} \in C \; \forall i$.
$\Rightarrow$ (Trennungssatz mit $\gamma = 0$) $-a_i \le 0$ für alle i. Somit gilt

$$\sum_{i=1}^m a_i > 0,$$

da $(a_i) \neq 0$ wegen $0 < \sum_{i=1}^m a_i Z_i$. Definiere

$$\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) := \frac{a_i}{\sum_{j=1}^m a_j}.$$

Wir zeigen $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Beachte, dass $\pm G_T^\alpha = G_T^{\pm\alpha} \in C \; \forall \alpha \in \mathcal{A}$ gilt. Somit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[G_T^\alpha] &= \frac{1}{\sum_{j=1}^m a_j} \sum_{i=1}^m a_i G_T^\alpha(\omega_i) \le 0 \\ \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-G_T^\alpha] &= -\frac{1}{\sum_{j=1}^m a_j} \sum_{i=1}^m a_i G_T^\alpha(\omega_i) \le 0. \end{aligned}$$

Beweis

Zusammen folgt also $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[G_T^\alpha] = 0$ für alle α.
Also folgt (Theorem 5.4) $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.
Außerdem gilt noch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] = \frac{1}{\sum_{j=1}^m a_j} \sum_{i=1}^m a_i Z_i > 0,$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Bemerkungen

Mithilfe der Menge L kann $\mathcal{M}$ auch wie folgt charakterisiert werden:

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = 0, \text{ für alle } X \in L.$$

Aufgrund der Definition von C gilt auch:

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{M} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] \leq 0, \text{ für alle } X \in C.$$

Erster Hauptsatz der Preistheorie

Theorem 8

Der Markt ist arbitragefrei $\Leftrightarrow \mathcal{M}^\star \neq \emptyset$.

Beweis

$'' \Leftarrow''$ Theorem 5.4. Wir müssen also nur noch $'' \Rightarrow''$ zeigen.

- Der Markt sei also arbitragefrei, d.h. $C \cap \mathbb{R}_+^m = \{0\}$.
- Insbesondere gilt $1_{\{\omega\}} \notin C$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Letztes Lemma $\Rightarrow \exists \mathbb{Q}_\omega \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\omega}[1_{\{\omega\}}] = \mathbb{Q}_\omega(\{\omega\}) > 0$.
- Definiere neues Wahrscheinlichkeitsmaß durch

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{Q}_{\omega_i}(\{\omega\}).$$

- Es gilt: $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
- Da $\mathbb{Q}$ eine Konvexkombination von $\mathbb{Q}_{\omega_i} \in \mathcal{M}$ ist, ist $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.
- Also ist $\mathcal{M}^\star \neq \emptyset$. $\square$