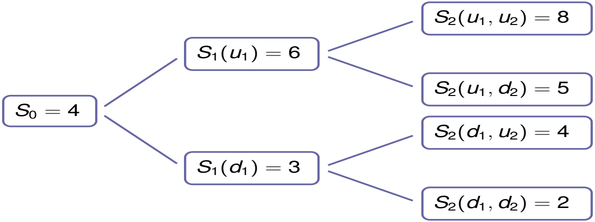
Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



6. Vollständigkeit und äquivalente Martingalmaße

Zweiter Hauptsatz der Preistheorie

Theorem 1

Es gelte (NA). *Der Markt ist vollständig* $\Leftrightarrow |\mathcal{M}^\star| = 1$.

Beweis

" $\Rightarrow$ " : Der Markt sei vollständig.

- Wegen (NA) gilt nach dem ersten Hauptsatz $\mathcal{M}^\star \neq \emptyset$.
- Seien $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{M}^\star$ beliebig. Zu zeigen: $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$.
- Sei H ein beliebiger Zahlungsanspruch und $\varphi = (\alpha, \beta)$ eine zugehörige Hedging-Strategie (ex. wegen der Vollständigkeit).
- Dann gilt $\frac{H}{B_T} = V_0^\varphi + G_T^\alpha$.
- Es folgt (Theorem 5.4) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[G_T^\alpha] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[G_T^\alpha] = 0$.
- Also $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[H] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[H]$.
- Da H beliebig ist, folgt $\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q}_2$ und $|\mathcal{M}^\star| = 1$.

Beweis

" $\Leftarrow$ " : Der Markt sei jetzt nicht vollständig. Zu zeigen ist $|\mathcal{M}^\star| > 1$.
Sei nun

$$L := \left\{ X \in \mathbb{R}^m : X_i = c + G_T^\alpha(\omega_i) \text{ für } i = 1, \dots, m, c \in \mathbb{R} \text{ und } \alpha \in \mathcal{A} \right\}$$

L ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^m$.Wegen (NA) gilt $\mathcal{M}^\star \neq \emptyset$.
Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$ und $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) =: q_i, i = 1, \dots, m$.
Für Zufallsvariablen Z, Y auf Ω betrachten wir das Skalarprodukt

$$< Z, Y >:= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[ZY] = \sum_{i=1}^{m} Z_i Y_i q_i.$$

Nach Voraussetzung existiert ein nicht erreichbarer Zahlungsanspruch H, d.h. $\frac{H}{B_T} \in \mathbb{R}^m$, aber $\frac{H}{B_T} \notin L$. Damit ist L ein echter Unterraum des $\mathbb{R}^m$ und das orthogonale Komplement $L^\perp$ ist nicht trivial.

Beweis

Also existiert ein $Z \in L^\perp, Z \neq 0$, mit

$$< Z, Y >= \sum_{i=1}^{m} Z_i Y_i q_i = 0 \text{ für alle } Y \in L.$$

Da $(1, \dots, 1) \in L$, gilt $\sum_{i=1}^m Z_i q_i = 0$. Wir definieren nun ein weiteres Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q}$ und zeigen $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}^\star$, also die Behauptung. Sei

$$\mathbb{Q}'(\{\omega_i\}) := \left(1 + \frac{Z_i}{2||Z||}\right) q_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

wobei $||Z|| = \max\{|Z_i| : 1 \leq i \leq m\}$. Dann folgt, dass $\mathbb{Q}' \neq \mathbb{Q}$.

Beweis

Außerdem ist $\mathbb{Q}'$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, da $\mathbb{Q}'(\{\omega_i\}) > 0$ für alle $\omega_i \in \Omega$ und

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}'(\Omega) &= \sum_{i=1}^{m} \left(1 + \frac{Z_i}{2||Z||}\right) q_i = \sum_{i=1}^{m} q_i + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{Z_i}{2||Z||}\right) q_i \\ &= 1 + \frac{1}{2||Z||} \sum_{i=1}^{m} Z_i q_i = 1. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\mathbb{Q}' \sim \mathbb{P}$. Noch zu zeigen: $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}$.

Beweis

Sei nun $Y = (c + G_T^\alpha(\omega_1), \dots, c + G_T^\alpha(\omega_m)) \in L$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} c + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[G_T^\alpha] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[Y] = \sum_{i=1}^m Y_i \mathbb{Q}'(\{\omega_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^m Y_i \left(1 + \frac{Z_i}{2||Z||}\right) q_i = \sum_{i=1}^m Y_i q_i + \sum_{i=1}^m Y_i \left(\frac{Z_i}{2||Z||}\right) q_i \\ &= \sum_{i=1}^m Y_i q_i + \frac{1}{2||Z||} \sum_{i=1}^m Y_i Z_i q_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[c + G_T^\alpha] = c, \end{aligned}$$

Daher gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[G_T^\alpha] = 0$ für alle α, und es folgt, dass $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}$. Da $\mathbb{Q}' \sim \mathbb{P}$ ist, gilt auch $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}^\star$. $\square$

Alternative Charakterisierung der Vollständigkeit

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem 2

Es gelte (NA), und es sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$. *Der Markt ist vollständig* $\Leftrightarrow$ *jedes* $(\mathcal{F}_t)$*-Martingal* (M_t) *unter* $\mathbb{Q}$ *besitzt eine Darstellung der Form*

$$M_t = M_0 + \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n, \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

für einen $(\mathcal{F}_t)$*-adaptierten Prozess* (α_t).

Beweis

" $\Rightarrow$ " : Der Markt sei vollständig, und (M_t) sei ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal unter $\mathbb{Q}$. Dann ist $H := M_T B_T$ ein $\mathcal{F}_T$-messbarer Zahlungsanspruch.
Da Markt vollständig , existiert ein selbstfinanzierendes $\varphi = (\alpha, \beta)$ mit

$$V_T^\varphi = H \quad \text{bzw} \frac{V_T^\varphi}{B_T} = M_T.$$

Also gilt mit der Voraussetzung und da $(V_t^\varphi B_t^{-1})$ ein Martingal unter $\mathbb{Q}$

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[M_T \mid \mathcal{F}_t] = M_t.$$

Und mit

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = V_0^\varphi + G_t^\alpha = V_0^\varphi + \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \cdot \Delta \tilde{S}_n,$$

folgt die Martingaldarstellung.

Beweis

" $\Leftarrow$ " : Es gelte jetzt die Martingaldarstellung. Sei H ein beliebiger Zahlungsanspruch und definiere

$$M_t := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Dann ist (M_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal unter $\mathbb{Q}$ und $V_0^\varphi := M_0 \in \mathbb{R}$. Es existiert also ein Prozess (α_t) mit

$$M_t = M_0 + \sum_{n=1}^{t} \alpha_{n-1} \cdot \Delta\tilde{S}_n = M_0 + G_t^\alpha = \frac{V_t^\varphi}{B_t}.$$

Insbesondere gilt $\frac{H}{B_T} = M_T = \frac{V_T^\varphi}{B_T}$, und damit folgt die Vollständigkeit. $\square$

Bestimmung von Martingalmaßen

Bestimmung von Martingalmaßen

- $\Omega := \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_T$
- $Y_t(\omega) = y_t$ für $\omega = (y_1, \ldots, y_T) \in \Omega$
- $h_t = (y_1, \ldots, y_t)$ = Vorgeschichte zur Zeit t
- $\mathcal{F}_t := \sigma\big(Y_1, \ldots, Y_t\big) \Rightarrow S_t = s_t(Y_1, \ldots, Y_t)$.

Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ lässt sich schreiben als:

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) = q_1(y_1)q_2(y_2|y_1)\ldots q_T(y_T|h_{T-1}).$$

Bestimmung von Martingalmaßen

Unter $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ muss gelten:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Delta \tilde{S}_t^k | \mathcal{F}_{t-1}] = 0, \quad \text{für alle } t = 1, \dots, T \text{ und } k = 1, \dots, d.$$

Nach Definition des bedingten Erwartungswertes heißt das:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_A \Delta \tilde{S}_t^k d\mathbb{Q}, \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}_{t-1} \text{ und } t \text{ und } k \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \sum_{y \in \Omega_t} \Delta \tilde{S}_t^k (h_{t-1}, y) q_t(y|h_{t-1}) \cdot \ldots \cdot q_1(y_1) \\ & \quad \text{für alle } t, k \text{ und } h_{t-1}. \end{aligned}$$

Bestimmung von Martingalmaßen

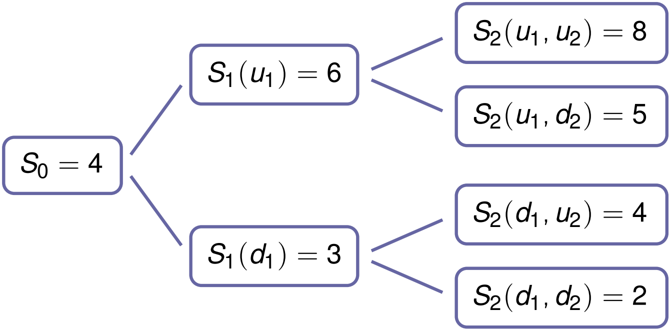
Daher kann man ein $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ bestimmen, indem man für $t = 1, \dots, T$ die $q_t(y|h_{t-1})$ aus folgenden LGS berechnet:

$$\begin{aligned}
&\sum_{y \in \Omega_t} q_t(y|h_{t-1}) \Delta \tilde{S}_t^k(h_{t-1}, y) = 0, \; k = 1, \dots, d \\
&\sum_{y \in \Omega_t} q_t(y|h_{t-1}) = 1.
\end{aligned}$$

- Das LGS hat $(d+1)$ Gleichungen und $|\Omega_t|$ Unbekannte. Die Lösung ist eindeutig, wenn $(\Delta \tilde{S}_t^k(h_{t-1}, y), y \in \Omega_t)$ und $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{|\Omega_t|}$ linear unabhängig sind und $d + 1 = |\Omega_t|$.
- Gilt auch $q_t(y|h_{t-1}) > 0$, so ist sogar $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$.
- Im CRR-Modell gilt $|\Omega_t| = 2$. $((d/(1+r) - 1)x, (u/(1+r) - 1)x)$ und $(1, 1)$ sind linear unabhängig, falls $d < 1 + r < u$. Also $|\mathcal{M}^\star| = 1$.

Beispiel 1

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$, $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und



Beispiel 1

Hier ist $\Omega = \{u_1, d_1\} \times \{u_2, d_2\}$ und $\mathbb{Q}(\{y_1, y_2\}) = q_1(y_1)q_2(y_2|y_1)$.
Betrachten wir $t = 1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} q_1(u_1)(6-4) + q_1(d_1)(3-4) &= 0 \\ q_1(u_1) + q_1(d_1) &= 1. \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man $q_1(u_1) = \frac{1}{3}, q_1(d_1) = \frac{2}{3}$.

Beispiel 1

Betrachten wir den oberen Knoten für $t = 2$, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} q_2(u_2|u_1)(8-6) + q_2(d_2|u_1)(5-6) &= 0 \\ q_2(u_2|u_1) + q_2(d_2|u_1) &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung ist hier $q_2(u_2|u_1) = \frac{1}{3}$, $q_2(d_2|u_1) = \frac{2}{3}$. Betrachten wir den unteren Knoten für $t = 2$, so ergibt sich:

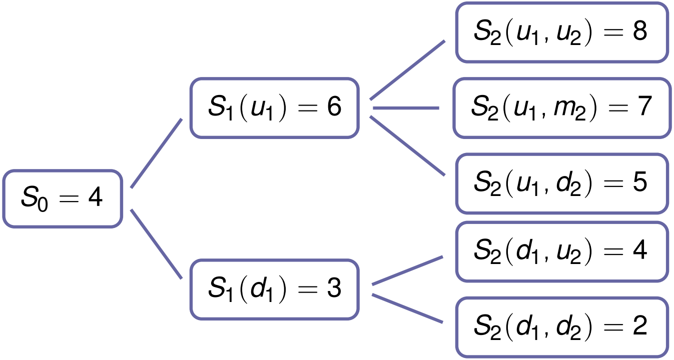
$$\begin{aligned} q_2(u_2|d_1)(4-3) + q_2(d_2|d_1)(2-3) &= 0 \\ q_2(u_2|d_1) + q_2(d_2|d_1) &= 1, \end{aligned}$$

mit Lösung $q_2(u_2|d_1) = \frac{1}{2}$, $q_2(d_2|d_1) = \frac{1}{2}$. Daraus erhält man insgesamt

$$\mathbb{Q}(\{u_1, u_2\}) = q_1(u_1)q_2(u_2|u_1) = \frac{1}{9}, \; \mathbb{Q}(\{u_1, d_2\}) = q_1(u_1)q_2(d_2|u_1) = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{Q}(\{d_1, u_2\}) = q_1(d_1)q_2(u_2|d_1) = \frac{1}{3}, \; \mathbb{Q}(\{d_1, d_2\}) = q_1(d_1)q_2(d_2|d_1) = \frac{1}{3}.$$

Beispiel 2

Wir ändern das vorige Beispiel etwas ab:



Beispiel 2

- Hier ist $\Omega = \{u_1, d_1\} \times \{u_2, m_2, d_2\}$, wobei $\mathbb{P}(\{d_1, m_2\}) = 0$. Es muss also auch $\mathbb{Q}(\{d_1, m_2\}) = 0$ gelten.
- Alternativ entfernt man das Element aus dem Grundraum.
- Nur das LGS zur Zeit $t = 2$ im oberen Knoten ändert sich:

$$\begin{aligned} q_2(u_2|u_1)(8-6) + q_2(m_2|u_1)(7-6) + q_2(d_2|u_1)(5-6) &= 0 \\ q_2(u_2|u_1) + q_2(m_2|u_1) + q_2(d_2|u_1) &= 1. \end{aligned}$$

- Als Lösung ergibt sich
  $q_2(u_2|u_1) = q$, $q_2(m_2|u_1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}q$, $q_2(d_2|u_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$, wobei $q \in (0, \frac{1}{3})$ sein muss, damit $q_2(\cdot|\cdot) \in (0, 1)$ ist.

Der Finanzmarkt ist also arbitragefrei aber nicht vollständig.

Beispiel 3

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 1$, $B_0 = B_1 = 1$ und zwei Aktien:

$$S_0^1 = 5,\ S_0^2 = 10$$

$$S_1^1(u) = 10,\ S_1^2(u) = 15$$

$$S_1^1(m) = 5,\ S_1^2(m) = 8$$

$$S_1^1(d) = 2,\ S_1^2(d) = 12$$

Beispiel 3

Hier ist $\Omega = \{u, m, d\}$. Betrachten wir $T = 1$, so ergibt sich das LGS:

$$\begin{aligned} q(u)\cdot(10-5) + q(m)\cdot 0 + q(d)\cdot(2-5) &= 0 \\ q(u)\cdot(15-10) + q(m)\cdot(8-10) + q(d)\cdot(12-10) &= 0 \\ q(u) + q(d) + q(m) &= 1. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{6}{41}, \mathbb{Q}(\{m\}) = \frac{25}{41}, \mathbb{Q}(\{d\}) = \frac{10}{41}.$$

Da das lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar ist und $\mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt, existiert hier genau ein äquivalentes Martingalmaß.