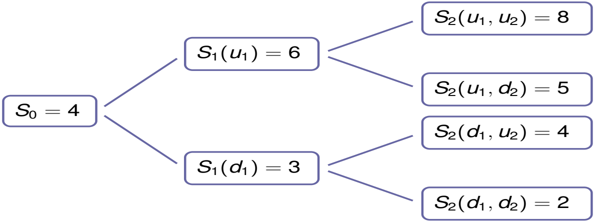
Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



7. Risikoneutrale Bewertung von Zahlungsansprüchen

Risikoneutrale Bewertung

- Voraussetzung: Finanzmarkt ist arbitragefrei.
- $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
- $\mathcal{F}_T = \mathcal{F} =$ Potenzmenge von Ω.
- Preis $\pi(H)$ zur Zeit $t = 0$ eines erreichbaren Zahlungsanspruches H ist gerade das Anfangsvermögen einer Hedging-Strategie.
- Ist φ eine Hedging-Strategie für H, so gilt $V_t^\varphi =$ Preis von H zur Zeit t.

Eindeutigkeit des Preises

Lemma 1
Für jeden erreichbaren Zahlungsanspruch H und für selbstfinanzierende Strategien φ und ψ mit $V_T^{\varphi} = H = V_T^{\psi}$ gilt:

$$V_t^{\varphi} = V_t^{\psi} \text{ für alle } t \in \{0, \ldots, T\}.$$

$\pi_t(H) := V_t^{\varphi}$ ist also der (eindeutige) Preis des Zahlungsanspruchs H zur Zeit t.

Beweis

Markt ist arbitragefrei $\Rightarrow \exists \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$. Die diskontierten Vermögensprozesse $\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t}\right)$ und $\left(\frac{V_t^\psi}{B_t}\right)$ sind $\mathbb{Q}$-Martingale. Also folgt für t:

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{V_T^\varphi}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{V_T^\psi}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{V_t^\psi}{B_t}.$$

Diese Gleichung gilt für alle $\omega \in \Omega$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Risikoneutrale Bewertungsformel

Theorem 2

Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch. Dann gilt für den Preis von H zur Zeit t

$$\pi_t(H) = B_t \, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_T} \Big| \mathcal{F}_t \right]$$

für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$. Insbesondere ist $\pi_t(H)$ unabhängig von der Wahl von $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$.

Beweis

Da H erreichbar ist, $\exists \varphi = (\alpha, \beta)$ mit $H = V_T^\varphi$. Wegen (NA) gilt $\mathcal{M}^\star \neq \emptyset$. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$. Es folgt, dass $\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t}\right)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist. Daher gilt

$$\pi_t(H) = V_t^\varphi = B_t \, \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{V_T^\varphi}{B_T} \Big| \mathcal{F}_t\right] = B_t \, \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_T} \Big| \mathcal{F}_t\right]$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Spezialfall $t = 0$

Corollary 3

Sei H ein erreichbarer Zahlungsanspruch. Dann gilt für den Preis $\pi(H)$ von H zur Zeit $t = 0$:

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right]$$

für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$.

Beweis: Die Behauptung folgt wegen $B_0 = 1$ und $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ sofort aus dem letzten Satz.

Bemerkung

Vorgehen in der Praxis: Zerlege H in einfachere Teile. Sei z.B. $H = \lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2$, wobei H_1 und H_2 jeweils erreichbar sind, mit

$$\frac{H_i}{B_T} = V_0^i + G_T^{\alpha_i}, \quad i = 1, 2.$$

Dann gilt für $\alpha := \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ und $V_0 := \lambda_1 V_0^1 + \lambda_2 V_0^2$ die Gleichung

$$\frac{H}{B_T} = V_0 + G_T^{\alpha}.$$

H ist also erreichbar, besitzt den Preis $\pi(H) = \lambda_1 \pi(H_1) + \lambda_2 \pi(H_2)$ und $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$ kann zu einer selbstfinanzierenden Hedging-Strategie ergänzt werden.

Put-Call-Parität

Put-Call Parität: Portfolio A

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$
Kaufe einen Call Investiere KB_T^{-1} in das risikolose WP	$(S_T - K)^+$ K
Kosten: $C + KB_T^{-1}$	Gesamt: $(S_T - K)^+ + K$

Put-Call Parität: Portfolio B

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$
Kaufe einen Put Kaufe eine Aktie	$(K - S_T)^+$ S_T
Kosten: $P + S_0$	Gesamt: $(K - S_T)^+ + S_T$

Die Auszahlungen von Portfolio A und B sind zur Zeit T gleich:

$$(S_T - K)^+ + K = \max\{K, S_T\} = (K - S_T)^+ + S_T.$$

Also müssen die Preise der beiden Portfolios zur Zeit $t = 0$ gleich sein.

Put-Call Parität

Theorem 4

Es gilt die sogenannte Put-Call-Parität*:*

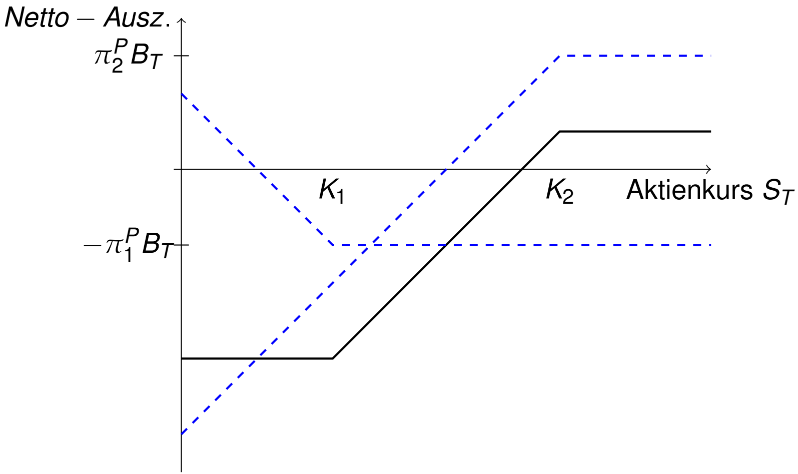
$$C + KB_T^{-1} = P + S_0.$$

Allgemeiner gilt zur Zeit t:

$$C_t + K\frac{B_t}{B_T} = P_t + S_t.$$

Spreads

Ein *Spread* kombiniert zwei Call- oder zwei Put-Optionen mit verschiedenen Restlaufzeiten (*Horizontal Sp.*) oder Basispreisen (*Vertical Sp.*) auf die gleiche Aktie.



Exotische Optionen

Puts und Calls werden auch *Plain Vanilla-Optionen* genannt. Standardbeispiele für exotische Optionen sind

a) Up-and-in-Call-Option

$$H_{u\&i}^{\text{call}} = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{falls } \max_{0\le t\le T} S_t \ge B, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

b) Up-and-out-Call-Option

$$H_{u\&o}^{\text{call}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \max_{0\le t\le T} S_t \ge B, \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

c) Lookback-Put-Option $H_{\max}^{\text{put}} = \max_{0\le t\le T} S_t - S_T$.

Einschub: Symmetrische Irrfahrten

Definition 5

Eine Folge von ZV (Z_t) mit $Z_0 := 0$ und $Z_t := \sum_{k=1}^t X_k$, wobei $X_1, X_2, \dots$ u.i.v. ZV sind mit $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$ heißt *symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.*

- Wir betrachten die Irrfahrt nur bis zum Zeitpunkt T.
- Jede Realisierung $(x_1, \dots, x_T) \in \{-1, 1\}^T =: \Omega$ von $(X_1, \dots, X_T)$ hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^T$.
- Jede Realisierung $(x_1, \dots, x_T)$ bestimmt eindeutig einen Weg $(Z_1, \dots, Z_T)$ der Irrfahrt, sodass dieser Weg ebenfalls die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^T$ besitzt.

Einschub: Symmetrische Irrfahrten

Lemma 6
Für $T \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ mit $-T \le b \le T$ gilt:

$$\mathbb{P}(Z_T = b) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^T \binom{T}{\frac{T+b}{2}}, & \textit{falls } T, |b| \textit{ die gleiche Parität besitzen.} \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Gleiche Parität bedeutet, dass die Zahlen beide gerade oder beide ungerade sind.

Beweis

- Sei $b \geq 0$.
- Um von $(0,0)$ zu (T,b) zu kommen, muss es b mehr Aufwärtsbewegungen als Abwärtsbewegungen geben, d.h., es muss $\frac{T-b}{2}$ Abwärtsbewegungen und $\frac{T-b}{2} + b = \frac{T+b}{2}$ Aufwärtsbewegungen geben.
- Dazu müssen T und b beide die gleiche Parität besitzen.
- Die Anzahl der Wege von $(0,0)$ zu (T,b) ist $\binom{T}{\frac{T-b}{2}} = \binom{T}{\frac{T+b}{2}}$.
- Für $b < 0$ gilt eine entsprechende Argumentation. $\square$

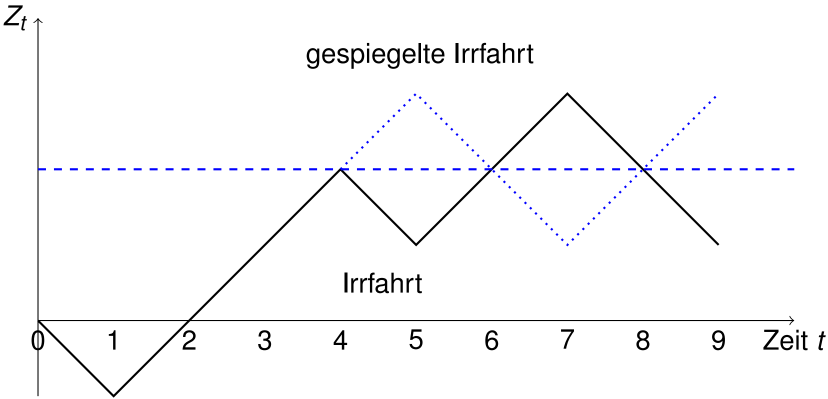
Spiegelungsprinzip

Sei jetzt $M_t := \max\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_t\}$ das laufende Maximum.

Lemma 7 (Spiegelungsprinzip)
Für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathbb{P}(M_T \geq k, Z_T = k - m) = \mathbb{P}(Z_T = k + m).$$

Spiegelungsprinzip



Beweis

- Zu jedem Weg von $(0,0)$ zu $(T, Z_T = k - m)$ mit $M_T \geq k$ gehört ein eindeutiger Weg von $(0,0)$ zu $(T, Z_T = k + m)$ (mit $M_T \geq k$).
- Somit sind beide Wahrscheinlichkeiten gleich. $\square$

Bewertung exotischer Optionen

Spezielles CRR-Modell:

- $d = \frac{1}{u}$ und $\frac{1}{u} < 1 + r < u$.
- Sei (Z_t) die klassische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$.
- Für den Preisprozess gilt dann:

$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^{t} Y_n = S_0 u^{\frac{t+Z_t}{2}} d^{\frac{t-Z_t}{2}} = S_0 u^{\frac{t+Z_t}{2} - \frac{t-Z_t}{2}} = S_0 u^{Z_t}.$$

Beispiel: Up-and-in-Call-Option

Die Auszahlung der Option hat hier die Form

$$H_{u\&i}^{\text{call}} = (S_T - K)^+ 1_{\{\max_{0\le t\le T} S_t \ge B\}}.$$

Dabei ist $K > 0$ der Basispreis und $B > \max\{S_0, K\}$. Bestimme

$$\pi(H_{u\&i}^{\text{call}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{u\&i}^{\text{call}}}{(1+r)^T}\right].$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_{u\&i}^{\text{call}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ 1_{\{\max_{0\le t\le T} S_t \ge B\}}] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K) 1_{\{S_T \ge B\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+ 1_{\{\max_{0\le t\le T} S_t \ge B, S_T < B\}}].
\end{aligned}$$

Hilfslemma

Lemma 8

Unter $\mathbb{Q}$ gilt für die Irrfahrt (Z_t) auf $\mathbb{Z}$ und $M_t := \max\{Z_0, Z_1, \dots, Z_t\}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$, falls T und $k+m$ die gleiche Parität besitzen,

a)

$$\mathbb{Q}(M_T \geq k, Z_T = k - m) = \binom{T}{\frac{T+k+m}{2}} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}},$$

b)

$$\mathbb{Q}(M_T = k, Z_T = k - m) = \binom{T+1}{\frac{T-k-m}{2}} \frac{k+m+1}{T+1} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}}.$$

Beweis

a) Die diskrete Dichte von $\mathbb{Q}$ bezüglich $\mathbb{P}$ ist gegeben durch

$$\frac{\mathbb{Q}(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})} = 2^T \cdot q^{\frac{T+Z_T(\omega)}{2}} (1-q)^{\frac{T-Z_T(\omega)}{2}}.$$

Daher folgt mit dem Spiegelungsprinzip und dem ersten Lemma

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(M_T \geq k, Z_T = k-m) &= \sum_{\{\omega : M_T(\omega) \geq k,\, Z_T(\omega) = k-m\}} \mathbb{Q}(\{\omega\}) = \\
&= 2^T \cdot q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}} \sum_{\{\omega : M_T(\omega) \geq k,\, Z_T(\omega) = k-m\}} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= 2^T \cdot q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}} \mathbb{P}(M_T \geq k,\ Z_T = k-m) \\
&= 2^T \cdot q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}} \mathbb{P}(Z_T = k+m) \\
&= \binom{T}{\frac{T+k+m}{2}} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}}.
\end{aligned}$$

Beweis

Für b) gilt (beachte: T und $k+m+2$ haben die gleiche Parität, wenn dies für T und $k+m$ der Fall ist),

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}(M_T = k, Z_T = k-m) = \\
= \;& \mathbb{Q}(M_T \geq k, Z_T = k-m) - \mathbb{Q}(M_T \geq k+1,\ Z_T = (k+1)-(m+1)) \\
= \;& \binom{T}{\frac{T+k+m}{2}} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}} - \binom{T}{\frac{T+k+m+2}{2}} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}} \\
= \;& \binom{T+1}{\frac{T-k-m}{2}} \frac{k+m+1}{T+1} q^{\frac{T+k-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k+m}{2}},
\end{aligned}$$

was genau der Behauptung entspricht. □

Optionsbewertung: Up-and-in-Call-Option

Sei $B = S_0 u^{k_b}$ mit $k_b \in \mathbb{N}_0$. Es gilt dann

$$S_T < B \;\Leftrightarrow\; S_0 u^{Z_T} < S_0 u^{k_b} \;\Leftrightarrow\; Z_T < k_b$$

und

$$\max\{S_0, S_1, \dots, S_T\} \geq B \;\Leftrightarrow\; S_0 u^{M_T} \geq S_0 u^{k_b} \;\Leftrightarrow\; M_T \geq k_b.$$

Optionsbewertung: Up-and-in-Call-Option

Karlsruher Institut für Technologie

Für den zweiten Teil der Bewertungsformel (T und $m+k_b$ besitzen die gleiche Parität, wenn $T+m+k_b$ gerade ist) folgt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_0 u^{Z_T} - K)^+ 1_{\{M_T \geq k_b,\, Z_T < k_b\}}] = \sum_{\substack{m=1 \\ T+m+k_b \text{ gerade}}}^{T-k_b} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_0 u^{Z_T} - K)^+ 1_{\{M_T \geq k_b, Z_T = k_b - m\}}]$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ T+m+k_b \text{ gerade}}}^{T-k_b} (S_0 u^{k_b - m} - K)^+ \mathbb{Q}(M_T \geq k_b, Z_T = k_b - m)$$

$$= \sum_{\substack{m=1 \\ T+m+k_b \text{ gerade}}}^{T-k_b} (S_0 u^{k_b - m} - K)^+ \binom{T}{\frac{T+k_b+m}{2}} q^{\frac{T+k_b-m}{2}} (1-q)^{\frac{T-k_b+m}{2}}$$

$$= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k_b} \sum_{\substack{m=1 \\ T+m+k_b \text{ gerade}}}^{T-k_b} (S_0 u^{k_b - m} - K)^+ \binom{T}{\frac{T-k_b-m}{2}} q^{\frac{T-k_b-m}{2}} (1-q)^{\frac{T+k_b+m}{2}}.$$

Optionsbewertung: Up-and-in-Call-Option

Substituiere $n := \frac{T-k_b-m}{2}$ und erhalte mit $\bar{n} := \max\{n \in \mathbb{N}_0 : n < \frac{T-k_b}{2}\}$:

$$= \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k_b} \sum_{n=0}^{\bar{n}} (S_0 u^{2k_b - T + 2n} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n}.$$

Insgesamt erhält man mit $\underline{n} := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq \frac{T+k_b}{2}\}$:

$$\begin{aligned}\pi(H^{\text{call}}_{u\&i}) \quad = \quad & (1+r)^{-T} \Bigg(\sum_{n=\underline{n}}^{T} (S_0 u^{2n-T} - K) \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} + \\ & + \left(\frac{q}{1-q}\right)^{k_b} \sum_{n=0}^{\bar{n}} (S_0 u^{2n-T+2k_b} - K)^+ \binom{T}{n} q^n (1-q)^{T-n} \Bigg).\end{aligned}$$

Optionsbewertung: Up-and-out-Call-Option

Die Auszahlung der Option hat hier die Form

$$H_{u\&o}^{\text{call}} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \max_{0 \le t \le T} S_t \ge B, \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist $K > 0$ der Basispreis und $B > \max\{S_0, K\}$. Sei

$$H^{\text{call}} := (S_T - K)^+$$

mit Preis $\pi(H^{\text{call}})$. Wegen $H^{\text{call}} = H_{u\&o}^{\text{call}} + H_{u\&i}^{\text{call}}$ gilt

$$\pi(H_{u\&o}^{\text{call}}) = \pi(H^{\text{call}}) - \pi(H_{u\&i}^{\text{call}}).$$

Optionsbewertung: Lookback-Put-Option

Der Preis ist gegeben durch

$$\pi(H_{\max}^{\text{put}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\max_{0\le t\le T} S_t - S_T}{(1+r)^T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\max_{0\le t\le T} S_t}{(1+r)^T}\right] - S_0.$$

Wir berechnen nur den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max_{0\le t\le T} S_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max_{0\le t\le T} S_0 u^{Z_t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 u^{\max_{0\le t\le T} Z_t}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 u^{M_T}]$$

$$= \sum_{n=0}^{T} S_0 u^n \mathbb{Q}(M_T = n) = \sum_{n=0}^{T}\sum_{l=0}^{T} S_0 u^n \mathbb{Q}(M_T = n, Z_T = n-l).$$

Die auftretenden Wahrscheinlichkeiten haben wir bereits bestimmt.

Bewertung in unvollständigen Märkten

Superhedging

- Wir setzen (NA) voraus.
- Der Finanzmarkt kann unvollständig sein.

Definition 9

Sei H ein Zahlungsanspruch. Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ heißt *Superhedging-Strategie für H*, falls $V_T^\varphi \geq H$ gilt.

Superhedging

- Im Folgenden sei

$$\pi_+(H) \quad := \quad \inf\{V_0^\varphi : \varphi \text{ ist eine Superhedging-Strategie für } H\}.$$

- Wegen $V_0^\varphi + G_T^\alpha = \frac{V_T^\varphi}{B_T}$ gilt, dass $\pi_+(H) \geq \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\frac{H}{B_T}]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.
- Analog sei

$$\pi_-(H) \quad := \quad \sup\{V_0^\varphi : \varphi \text{ ist eine s.f. Strategie mit } V_T^\varphi \leq H\}.$$

- Hier gilt $\pi_-(H) \leq \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\frac{H}{B_T}]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.
- Offensichtlich ist $\pi_-(H) \leq \pi_+(H)$.
- Es gilt: $\pi_-(H) \leq \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_T}\right] \leq \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_T}\right] \leq \pi_+(H)$.

Preisintervall

- Ein Preis von H muss in $(\pi_-(H), \pi_+(H))$ liegen!!
- Sei z.B. $\pi(H) \geq \pi_+(H)$: Dann $\exists \varphi$ mit $V_0^\varphi = \pi_+(H)$ und $V_T^\varphi \geq H$.

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$
Verkaufe Option Investiere in φ.	$-H$ V_T^φ
Gewinn: $\pi(H) - \pi_+(H) \geq 0$	Gewinn: $V_T^\varphi - H \geq 0$

- Und $\exists \omega \in \Omega$ mit $V_T^\varphi(\omega) > H(\omega)$ (sonst wäre φ Hedging-Strategie).
- Analog: $\pi(H) \leq \pi_-(H)$ erzeugt Arbitrage.

Charakterisierung erreichbarer Zahlungsansprüche

Karlsruher Institut für Technologie

Theorem 10

Ein Zahlungsanspruch H ist erreichbar $\Leftrightarrow \pi_-(H) = \pi_+(H)$.

Beweis

Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$ und H nicht erreichbar, d.h.

$$\frac{H}{B_T} \notin L \subset \mathbb{R}^m.$$

Weiter gilt: $\frac{H}{B_T} = H_L + Z$ mit $Z \in L^\perp, Z \neq 0$ und $H_L \in L$. Wie im Beweis vom 2. Hauptsatz sei $\mathbb{Q}' \in \mathcal{M}^\star$ definiert als

$$\mathbb{Q}'\big(\{\omega_i\}\big) := \Big(1 + \frac{Z_i}{2\|Z\|}\Big)\mathbb{Q}\big(\{\omega_i\}\big), \quad i = 1, \dots, m.$$

Wegen $H_L \in L$ gilt $H_L = \frac{V_T^\varphi}{B_T}$ für ein φ, und wegen $< Z, H_L >= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_L Z] = 0$ gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[H_L] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_L] = V_0^\varphi$.

Beweis

Weiter ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[Z] = \sum_{i=1}^{m} Z_i \mathbb{Q}'(\{\omega_i\}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] + \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z^2]}{2\|Z\|} > \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z].$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \pi_-(H) &\leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_L] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] < \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[H_L] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}[Z] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}\left[\frac{H}{B_T}\right] \leq \pi_+(H). \end{aligned}$$

Ist H erreichbar, so folgt aus $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] \leq \pi_-(H) \leq \pi_+(H) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right]$, dass $\pi_+(H) = \pi_-(H)$ gilt. $\square$

Charakterisierung erreichbarer Zahlungsansprüche

Corollary 11

Folgende Aussagen über einen Zahlungsanspruch H sind äquivalent:

a) *H ist erreichbar.*

b) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{H}{B_T}]$ *ist konstant für alle* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$.

c) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{H}{B_T}]$ *ist konstant für alle* $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$.

Beweis

- Ist H erreichbar, so folgt, dass $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{H}{B_T}]$ konstant ist für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$.
- Ist H nicht erreichbar, so $\exists \mathbb{Q}, \mathbb{Q}' \in \mathcal{M}^\star$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] < \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'}\left[\frac{H}{B_T}\right]$.

Damit sind a) und b) äquivalent. Für die Äquivalenz von b) und c):

- Jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ kann man durch $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{M}^\star$ approximieren mit

$$\mathbb{Q}_n := \frac{1}{n}\mathbb{Q}^* + \frac{n-1}{n}\mathbb{Q} \quad \text{mit } \mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}^\star.$$

  $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}^\star$ existiert wegen (NA).
- Gilt b), so ist $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[\frac{H}{B_T}]$ und auch $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}[\frac{H}{B_T}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{H}{B_T}]$ konstant.
- Die Umkehrung ist offensichtlich. $\square$

Darstellung der Preisschranken

Theorem 12

Sei H ein beliebiger Zahlungsanspruch.

a) *Es gilt folgende duale Darstellung von* $\pi_+(H)$ *und* $\pi_-(H)$*:*

$$\pi_+(H) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^\star} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right]$$

$$\pi_-(H) = \min_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^\star} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

b) $\pi_+(H) = \min\left\{a : \text{ Es gibt ein } \alpha \in \mathcal{A} \text{ mit } a + G_T^\alpha \geq \frac{H}{B_T}\right\}.$

$\pi_-(H) = \max\left\{a : \text{ Es gibt ein } \alpha \in \mathcal{A} \text{ mit } a + G_T^\alpha \leq \frac{H}{B_T}\right\}.$

Erinnerung

Betrachte

$$L := \left\{ X \in \mathbb{R}^m : X_i = G_T^\alpha(\omega_i) \text{ für } i = 1, \dots, m \text{ und } \alpha \in \mathcal{A} \right\}.$$

und

$$C := \left\{ X \in \mathbb{R}^m : X \leq Y \text{ für ein } Y \in L \right\}.$$

Lemma 5.7: Für jedes $Z \notin C$ gibt es ein $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ mit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] > 0$.

Beweis

a) Beweis nur für $\pi_+(H)$. Sei H ein beliebiger Zahlungsanspruch und

$$\pi := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

Es gilt $\pi \leq \pi_+(H)$. Wir zeigen nun: $\pi_+(H) \leq \pi$. Sei dazu

$$Z := \frac{H}{B_T} - \pi.$$

Offenbar gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] \leq 0 \ \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ und damit $Z \in C$. Also gibt es nach Definition von C bzw. L ein $\alpha^* \in \mathcal{A}$ mit $Z \leq G_T^{\alpha^*}$, d.h.

$$\frac{H}{B_T} \leq \pi + G_T^{\alpha^*},$$

und damit gilt, dass $\pi_+(H) \leq \pi$. Also insgesamt

$$\pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

Beweis

Wir zeigen jetzt die zweite Gleichung. Jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ kann durch $(\mathbb{Q}_n) \subset \mathcal{M}^\star$ approximiert werden und es gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_n}\left[\frac{H}{B_T}\right] \to \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

Daher folgt

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^\star} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right].$$

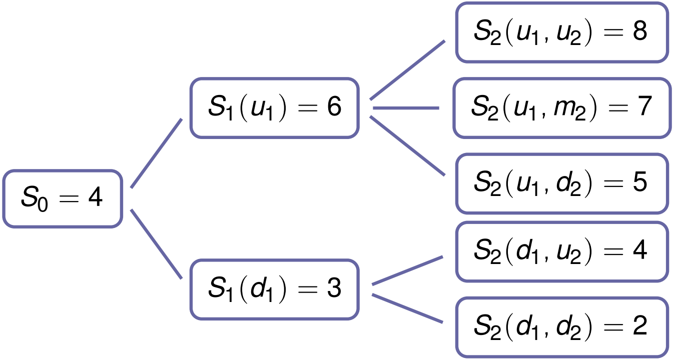
Beachte noch, dass $\mathcal{M}$ kompakt und $\mathbb{Q} \mapsto \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right]$ stetig ist.
b) Im Beweis von Teil a) haben wir gesehen, dass $\exists \alpha^* \in \mathcal{A}$ mit

$$\frac{H}{B_T} \leq \pi_+(H) + G_T^{\alpha^*},$$

d.h., zu $\pi_+(H)$ gibt es eine Superhedging-Strategie für H. $\square$

Beispiel

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit $T = 2$, $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und



Beispiel

Der Markt ist nicht vollständig und $\mathcal{M}^\star$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\{u_1, u_2\}) &= q_1(u_1)q_2(u_2|u_1) = \frac{1}{3}q \\
\mathbb{Q}(\{u_1, m_2\}) &= q_1(u_1)q_2(m_2|u_1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q \\
\mathbb{Q}(\{u_1, d_2\}) &= q_1(u_1)q_2(d_2|u_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}q \\
\mathbb{Q}(\{d_1, u_2\}) &= q_1(d_1)q_2(u_2|d_1) = \frac{1}{3} = \mathbb{Q}(\{d_1, d_2\})
\end{aligned}$$

mit $q \in (0, \frac{1}{3})$. Betrachte eine Call-Option mit $K = 7$, dann gilt $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{M}^\star$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T - 7)^+}{B_T}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - 7)^+\right] = \frac{1}{3}q.$$

Damit erhalten wir für die arbitragefreien Preise das Intervall:

$$(\pi_-(H), \pi_+(H)) = (0, \frac{1}{9}).$$