KIT
Karlsruher Institut für Technologie

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)

8. Amerikanische Optionen

Europäische vs. amerikanische Optionen

Europäische Optionen können nur am Ende ihrer Laufzeit ausgeübt werden.
Dagegen können amerikanische Optionen zu jedem Zeitpunkt vor dem Ende der Laufzeit ausgeübt werden.

Modellannahmen

- Der Finanzmarkt sei arbitragefrei und vollständig, d.h., $\exists!\, \mathbb{Q}$.
- Eine amerikanische Option wird repräsentiert durch einen $(\mathcal{F}_t)$-adaptierten stochastischen Prozess (H_t).
- Ein Ausübungszeitpunkt wird durch eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, T\}$ beschrieben.
- Verwendet der Käufer der Option den Ausübungszeitpunkt τ, dann ist

$$H_\tau(\omega) = \sum_{t=0}^{T} H_t(\omega) 1_{\{\tau(\omega)=t\}}$$

die Auszahlung der Option.

Beispiel: Amerikanische Put-Option

- Es ist $H_t = (K - S_t)^+$.
- Möglicher Ausübungszeitpunkt $\tau = \min\{t \in \mathbb{N} : S_t \le K\} \wedge T$.
- Beachte, dass τ eine Stoppzeit ist.
- Dann ist in diesem Fall

$$H_\tau = \sum_{t=0}^{T} (K - S_t)^+ 1_{\{\tau = t\}}$$

die Auszahlung des amerikanischen Puts.

Beispiel: Bermuda-Option

- Bei einer Bermuda-Option hat der Käufer das Recht, zu bestimmten Zeitpunkten $\mathcal{T} := \{t_1, \ldots, t_k\} \subset \{0, 1, \ldots, T\}$ auszuüben.
- Ist $\mathcal{T} = \{T\}$, dann liegt eine europäische Option vor.
- Ist $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, dann liegt eine amerikanische Option vor.
- Definiert man die Wertpapierkurse aber nur auf $\mathcal{T}$, dann kann man die Bewertung auf den amerikanischen Fall zurückführen.

Preis einer amerikanischen Option

Karlsruher Institut für Technologie

Wir definieren den Preis einer amerikanischen Option $H = (H_t)$ durch

$$\pi^A(H) := \sup_{\tau \le T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right],$$

wobei das Supremum über alle Stoppzeiten τ mit $\tau \le T$ genommen wird.

Einschub: Stoppprobleme

Sei (X_t) ein $(\mathcal{F}_t)$-adapt. stochastischer Prozess mit $\mathbb{E}\,|X_t| < \infty\ \forall t \in \mathbb{N}_0$.

Zu lösen ist das Stoppproblem

$$\sup_{\tau \le T} \mathbb{E}[X_\tau],$$

wobei das Supremum über alle $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeiten τ genommen wird mit $\mathbb{P}(\tau \le T) = 1$.

Snell-Einhüllende

Definition 1

Ein stochastischer Prozess (Z_t), definiert durch

$$\begin{aligned} Z_T &:= X_T, \\ Z_t &:= \max\{X_t, \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]\}, \quad t = T-1, \dots, 0, \end{aligned}$$

heißt *Snell-Einhüllende* von (X_t).

Eigenschaft der Snell-Einhüllenden

Theorem 2

Die Snell-Einhüllende (Z_t) *von* (X_t) *ist ein Supermartingal und das kleinste Supermartingal, welches* (X_t) *dominiert, d.h.* $Z_t \geq X_t$ *für alle* $t = 0, 1, \dots, T$*.*

Beweis

- Es gilt $Z_t \geq \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ für $t = T-1, \dots, 0$. $\Rightarrow (Z_t)$ ist Supermgl.
- Es gilt $Z_t \geq X_t$, also dominiert (Z_t) den Prozess (X_t).
- Sei nun (Y_t) ein weiteres Supermgl mit $Y_t \geq X_t$. Z.z. $Y_t \geq Z_t\ \forall t$.
- Rückwärtsinduktion: Für $t = T$ gilt $Y_T \geq X_T = Z_T$.
  Gilt nun $Y_t \geq Z_t$, so folgt,

  $$Y_{t-1} \geq \mathbb{E}[Y_t|\mathcal{F}_{t-1}] \geq \mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]$$

  und $Y_{t-1} \geq X_{t-1}$. Daher gilt

  $$Y_{t-1} \geq \max\{X_{t-1}, \mathbb{E}[Z_t|\mathcal{F}_{t-1}]\} = Z_{t-1}$$

  und die Behauptung folgt. $\square$

Eigenschaft der Snell-Einhüllenden

Lemma 3

Sei $\tau^\star := \inf\{t \geq 0 : Z_t = X_t\}$*. Dann ist* $\tau^\star$ *eine Stoppzeit,* $\tau^\star \leq T$ *und der gestoppte Prozess* $(Z_{t\wedge\tau^\star})$ *ist ein Martingal.*

Beweis

Wegen $Z_T = X_T$ ist $\tau^\star \in \{0, 1, \dots, T\}$. Wegen $Z_t \geq X_t \;\forall t$ gilt

$$\{\tau^\star > t\} = \{Z_0 > X_0\} \cap \ldots \cap \{Z_t > X_t\} \in \mathcal{F}_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

und daher ist $\tau^\star$ eine Stoppzeit.
Für $t \leq T-1$ gilt

$$Z_{(t+1)\wedge\tau^\star} - Z_{t\wedge\tau^\star} = 1_{\{\tau^\star > t\}}(Z_{t+1} - Z_t).$$

Nach Definition von $\tau^\star$ gilt $Z_t > X_t$ auf $\{\tau^\star > t\}$, und es folgt

$$Z_t 1_{\{\tau^\star > t\}} = \mathbb{E}[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] 1_{\{\tau^\star > t\}}.$$

Beweis

Daher gilt

$$Z_{(t+1)\wedge\tau^\star} - Z_{t\wedge\tau^\star} = 1_{\{\tau^\star>t\}}(Z_{t+1} - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]).$$

Nehme nun die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_t]$ auf beiden Seiten.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{(t+1)\wedge\tau^\star} - Z_{t\wedge\tau^\star}|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[1_{\{\tau^\star>t\}}(Z_{t+1} - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t])|\mathcal{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau^\star>t\}}\mathbb{E}[Z_{t+1} - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_t] \\
&= 1_{\{\tau^\star>t\}}(\mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathbb{E}[Z_{(t+1)\wedge\tau^\star}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_{t\wedge\tau^\star}|\mathcal{F}_t] = Z_{t\wedge\tau^\star}$. □

Lösung Stoppproblem

Theorem 4

Die Stoppzeit $\tau^\star = \inf\{t \geq 0 : Z_t = X_t\}$ *löst das Stoppproblem, und es ist*

$$Z_0 = \mathbb{E}[X_{\tau^\star}] = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}[X_\tau].$$

Beweis

Da der Prozess $(Z_{t\wedge\tau^\star})$ ein Martingal ist, gilt

$$Z_0 = Z_{0\wedge\tau^\star} = \mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau^\star}] = \mathbb{E}[Z_{\tau^\star}] = \mathbb{E}[X_{\tau^\star}].$$

Für eine beliebige Stoppzeit τ gilt dann

$$Z_0 = Z_{0\wedge\tau} \geq \mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau}] = \mathbb{E}[Z_\tau] \geq \mathbb{E}[X_\tau].$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Preis einer amerikanischen Option

Theorem 5

Sei (Z_t) *die Snell-Einhüllende von* $\left(H_t B_t^{-1}\right)$ *und*

$$\tau^\star = \inf \left\{ t \geq 0 : Z_t = \frac{H_t}{B_t} \right\}.$$

Dann ist der Preis einer amerikanischen Option gegeben durch

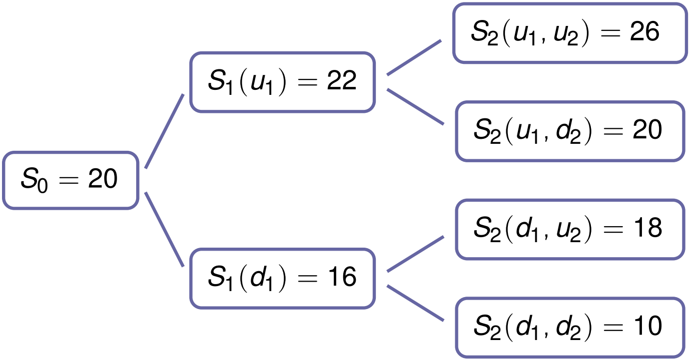
$$\pi^A(H) = Z_0 = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \right]$$

und $\tau^\star$ *ist ein optimaler Ausübungszeitpunkt, d.h.*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H_{\tau^\star}}{B_{\tau^\star}} \right] = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \right].$$

Beispiel

Sei $T = 2$, B verzinst mit $r = 5\%$ und die Aktie gegeben durch



Beispiel

Das hier eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch

$$q(u_1) = \frac{5}{6}, \quad q(u_2|u_1) = \frac{31}{60}, \quad q(u_2|d_1) = \frac{17}{20}.$$

Betrachte $H_t = (21 - S_t)^+$. Bestimmung der Snell-Einhüllenden:
Sei $T = 2$:

$$\begin{aligned} Z_2(u_1, u_2) &= 0, & Z_2(u_1, d_2) &= \left(\frac{20}{21}\right)^2 \\ Z_2(d_1, u_2) &= 3 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2, & Z_2(d_1, d_2) &= 11 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2. \end{aligned}$$

Beispiel

Für $T = 1$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Z_1(u_1) &= \max\{0\,,\; q(u_2|u_1)Z_2(u_1,u_2) + q(d_2|u_1)Z_2(u_1,d_2)\} \\
&= \max\left\{0\,,\; 0 + \frac{29}{60}\cdot\left(\frac{20}{21}\right)^2\right\} = \frac{580}{1323}, \\
Z_1(d_1) &= \max\left\{5\cdot\frac{20}{21}\,,\; q(u_2|d_1)Z_2(d_1,u_2) + q(d_2|d_1)Z_2(d_1,d_2)\right\} \\
&= \max\left\{\frac{100}{21}\,,\; \left(\frac{51}{20}+\frac{33}{20}\right)\cdot\left(\frac{20}{21}\right)^2\right\} = \frac{100}{21}.
\end{aligned}$$

Schließlich für $t = 0$

$$Z_0 = \max\left\{1\,,\; \frac{5}{6}\cdot\frac{580}{1323} + \frac{1}{6}\cdot\frac{100}{21}\right\} = \frac{4600}{3969} = \pi^A(H),$$

Optimaler Ausübungszeitpunkt: $\tau^\star(\omega) = 1$, für $\omega \in \{(d,u),(d,d)\}$
$\tau^\star(\omega) = 2$ sonst.

Amerikanische Call-Option

Hier ist $H_t = (S_t - K)^+$ und $K > 0$. Damit folgt dann

$$\frac{H_t}{B_t} = \left(\frac{S_t}{B_t} - \frac{K}{B_t}\right)^+ = \left(\tilde{S}_t - \frac{K}{B_t}\right)^+.$$

$g(x) = \left(x - \frac{K}{B_{t+1}}\right)^+$ ist konvex. Da $(\tilde{S}_t)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, folgt

$$\frac{H_t}{B_t} \le g(\tilde{S}_t) = g\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t]\right) \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(\tilde{S}_{t+1})|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{t+1}}{B_{t+1}}\middle|\mathcal{F}_t\right].$$

Daher ist $(H_t B_t^{-1})$ ein Submartingal unter $\mathbb{Q}$. Mit OST folgt:

$$\frac{H_\tau}{B_\tau} \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T}\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \;\Rightarrow\; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T}\right]$$

und

$$\sup_{\tau \le T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T}\right],$$

d.h., die amer. Call-Option wird erst am Ende der Laufzeit ausgeübt.

Preis einer amer. Option zur Zeit t

Für den Preis $\pi_t^A(H)$ zur Zeit t müssen wir folgendes Stoppproblem lösen:

$$\pi_t^A(H) := B_t \sup_{t \le \tau \le T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H_\tau}{B_\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Nach Konstruktion der Snell-Einhüllenden (Z_t) gilt: $\pi_t^A(H) = B_t Z_t$.

Ein Spezialfall (vgl. Call)

Lemma 6
Ist $\left(H_t B_t^{-1}\right)$ ein $\mathbb{Q}$-Submartingal, dann gilt

$$\pi_t^A(H) = \pi_t(H_T)$$

und $\tau^\star = T$ ist ein optimaler Ausübungszeitpunkt.
Dabei ist $\pi_t(H_T)$ der Preis der europäischen Option H_T zur Zeit t.

Beweis

- Ist $(H_t B_t^{-1})$ ein $\mathbb{Q}$-Submartingal, so gilt für $t = 0, 1, \ldots, T$

$$\frac{H_t}{B_t} \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] \quad \Leftrightarrow \quad H_t \leq B_t\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_T}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] =: \pi_t(H_T).$$

- Also ist $\frac{\pi_t(H_T)}{B_t} \geq \frac{H_t}{B_t}$ für $t = 0, 1, \ldots, T$.
- Da $(\pi_t(H_T)B_t^{-1})$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist und wegen den Eigenschaften der Snell-Einhüllende (Z_t), gilt für $t = 0, 1, \ldots, T$

$$Z_t \leq \frac{\pi_t(H_T)}{B_t}$$

- $\Rightarrow \pi_t^A(H) = B_t Z_t \leq \pi_t(H_T)$.
- Da $\pi_t^A(H) \geq \pi_t(H_T)$ immer gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Preisungleichungen

Sei C_t^A der Preis einer amer. Call-Option mit Basispreis K zur Zeit t und P_t^A der Preis einer amer. Put-Option mit Basispreis K zur Zeit t.

Lemma 7

Dann gilt die folgende Ungleichung:

$$S_t - K \leq C_t^A - P_t^A \leq S_t - K\frac{B_t}{B_T}.$$

Beweis

Sei C_t^E Preis einer europ. Call-Option mit Basispreis K z. Zt. t. Es gilt

$$C_t^A + K = C_t^E + K = B_t \, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} \Big| \mathcal{F}_t \right].$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} &\geq \frac{K}{B_t} \\ \frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} &\geq \frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_T} \geq \frac{S_T}{B_T}. \end{aligned}$$

Für eine beliebige Stoppzeit τ mit $t \leq \tau \leq T$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} \Big| \mathcal{F}_\tau \right] &\geq \frac{K}{B_t} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{(S_T - K)^+}{B_T} + \frac{K}{B_t} \Big| \mathcal{F}_\tau \right] &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T}{B_T} \Big| \mathcal{F}_\tau \right] \geq \frac{S_\tau}{B_\tau} \end{aligned}$$

Beweis

Somit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T-K)^+}{B_T}+\frac{K}{B_t}\Big|\mathcal{F}_\tau\right] \geq \max\left\{\frac{K}{B_\tau},\frac{S_\tau}{B_\tau}\right\} = \frac{(K-S_\tau)^+}{B_\tau}+\frac{S_\tau}{B_\tau}.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} C_t^A + K &= B_t\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T-K)^+}{B_T}+\frac{K}{B_t}\Big|\mathcal{F}_\tau\right]\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &\geq B_t\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-S_\tau)^+}{B_\tau}+\frac{S_\tau}{B_\tau}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\ &= B_t\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{(K-S_\tau)^+}{B_\tau}\Big|\mathcal{F}_t\right]+S_t. \end{aligned}$$

Also $C_t^A + K \geq P_t^A + S_t$.

2. Ungl. gilt mit Put-Call-Parität, da $C_t^A - P_t^A \leq C_t^E - P_t^E = S_t - K\frac{B_t}{B_T}$. □

Bewertung amerikanischer Optionen im Cox-Ross-Rubinstein-Modell

Bewertung amer. Optionen im CRR-Modell

Betrachte Spezialfall $H_t = h(S_t)$. Snell-Einhüllenden von $\left(H_t B_t^{-1}\right)$:

$$
\begin{aligned}
Z_T &= \frac{h(S_T)}{B_T} = \frac{h(S_T)}{(1+r)^T} =: Z_T(S_T),\\
Z_{T-1} &= \max\left\{\frac{h(S_{T-1})}{B_{T-1}}\ ,\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_T|\mathcal{F}_{T-1}]\right\}\\
&= \max\left\{\frac{h(S_{T-1})}{(1+r)^{T-1}}\ ,\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_T(S_{T-1}Y_T)|\mathcal{F}_{T-1}]\right\}\\
&= \max\left\{\frac{h(S_{T-1})}{(1+r)^{T-1}}, qZ_T(S_{T-1}u) + (1-q)Z_T(S_{T-1}d)\right\} =: Z_{T-1}(S_{T-1})\\
&\vdots\\
Z_t &= \max\left\{\frac{h(S_t)}{(1+r)^t}\ ,\ qZ_{t+1}(S_t u) + (1-q)Z_{t+1}(S_t d)\right\} =: Z_t(S_t),\\
&\vdots\\
Z_0 &= \max\{h(S_0)\ ,\ qZ_1(S_0 u) + (1-q)Z_1(S_0 d)\}.
\end{aligned}
$$

Bewertung amer. Optionen im CRR-Modell

Wir schreiben $Z_t(S_t)$, da Z_t von der Realisierung ω nur über S_t abhängt.

Praktisch ist es, die Rekursion gleich so durchzuführen, dass damit der Preisprozess der Option

$$\pi_t^A(H) = B_t Z_t = (1+r)^t Z_t(S_t) =: p_t(S_t)$$

berechnet wird.

Bewertung amer. Optionen im CRR-Modell

$$
\begin{aligned}
p_T(S_T) &= h(S_T), \\
&\vdots \\
p_t(S_t) &= \max\left\{ h(S_t), \frac{1}{1+r}\Big(q p_{t+1}(S_t u) + (1-q) p_{t+1}(S_t d) \Big) \right\} \\
&\vdots \\
p_0(S_0) &= \max\left\{ h(S_0), \frac{1}{1+r}\Big(q p_1(S_0 u) + (1-q) p_1(S_0 d) \Big) \right\} = \pi^A(H).
\end{aligned}
$$

Hedging von amerikanischen Optionen

Hedging von amerikanischen Optionen

Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ heißt *Hedging-Strategie* (aus Sicht des Verkäufers) für eine amerikanische Option (H_t), falls gilt:

$$V_t^\varphi \geq H_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

Theorem 8

Sei (H_t) eine amer. Option. Dann gibt es eine Hedging-Strategie φ mit

$$V_0^\varphi = \pi^A(H) = \sup_\tau \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right] = Z_0,$$

wobei (Z_t) die Snell-Einhüllende von $\left(H_t B_t^{-1}\right)$ ist.

Beweis

- Die Snell-Einhüllende (Z_t) ist ein $\mathbb{Q}$-Supermartingal.
- Mit der Doob'schen Zerlegung folgt $Z_t = M_t + A_t$ wobei (M_t) ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist und (A_t) mit $A_0 = 0$ ein fallender Prozess.
- Insbesondere gilt $A_{t+1} \leq A_t \leq \ldots \leq A_1 \leq A_0 = 0$.
- Da der Markt vollständig ist, $\exists \varphi$ mit $V_T^\varphi = M_T B_T$ und

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{V_T^\varphi}{B_T}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[M_T|\mathcal{F}_t] = M_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

- Für alle $t = 0, 1, \ldots, T$ gilt also

$$V_t^\varphi = B_t M_t \geq B_t Z_t \geq B_t \frac{H_t}{B_t} = H_t.$$

- Insbesondere ist der Preis der Hedging-Strategie φ

$$V_0^\varphi = M_0 = M_0 + A_0 = Z_0. \quad \square$$

Hedging von amerikanischen Optionen

Ist φ eine beliebige selbstfinanzierende Hedging-Stategie für (H_t), so gilt, dass $\left(\frac{V_t^\varphi}{B_t}\right)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal mit $\frac{V_t^\varphi}{B_t} \geq \frac{H_t}{B_t}$ ist, und damit $Z_t \leq \frac{V_t^\varphi}{B_t}$ $\forall t$.

Insgesamt folgt

$$\pi^A(H) = \inf\{V_0^\varphi : \varphi \text{ ist eine selbstfinanzierende Hedging-Strategie für } (H_t)\}.$$

Begründung des Preises

Annahme: $\pi^A(H) > \sup_\tau \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right]$.

- Verkaufe die Option zum Preis $\pi^A(H)$.
- Realisiere mit $\sup_\tau \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right]$ eine Hedging-Strategie für (H_t).
- Risikoloser Gewinn: $\pi^A(H) - \sup_\tau \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[H_\tau B_\tau^{-1}\right] > 0$.

Begründung des Preises

Annahme: $\pi^A(H) < \sup_{\tau \le T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right]$. $\Rightarrow \exists \tilde{\tau}$ mit $\pi^A(H) < \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}}\right]$.

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = 0, 1, \ldots, T$	Auszahlung zur Zeit $t = T$
Kaufe die Option und übe mit $\tilde{\tau}$ aus	$H_t 1_{\{\tilde{\tau}=t\}}$	
Verkaufe $T+1$ Optionen mit $H_t 1_{\{\tilde{\tau}=t\}}$	$-H_t 1_{\{\tilde{\tau}=t\}}$	
Kaufe $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}}\right] - \pi^A(H)$ risikol. WP		$B_T\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}}\right] - \pi^A(H)\right)$
Gesamt: 0	Gesamt: $B_T\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H_{\tilde{\tau}}}{B_{\tilde{\tau}}}\right] - \pi^A(H)\right)$	

Was passiert bei $\pi^A(H) = Z_0$?

Bei $\pi^A(H) = Z_0$ ist keine Arbitrage möglich (falls optimal ausgeübt wird)!
Ann. der Verkäufer hat eine Handelsstragtegie φ mit $V_0^\varphi = Z_0$ und

$$V_\tau^\varphi \geq H_\tau$$

für alle Stoppzeiten $\tau \leq T$. Da $\left(\frac{V_t}{B_t}\right)$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, gilt:

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{V_\tau^\varphi}{B_\tau}\right] = V_0^\varphi = Z_0 \geq \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H_\tau}{B_\tau}\right]$$

für alle Stoppzeiten $\tau \leq T$, und Gleichheit gilt, falls $\tau = \tau^\star$.
Also $V_{\tau^\star}^\varphi - H_{\tau^\star} \geq 0$ und $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[V_{\tau^\star}^\varphi - H_{\tau^\star}\right] = 0 \Rightarrow V_{\tau^\star}^\varphi = H_{\tau^\star}$ und bei optimaler Ausübung des Käufers bleibt kein Gewinn.

Hedging von amerikanischen Optionen

Unter optimaler Ausübung folgt für die Hedging-Strategie φ

$$\frac{V_t^\varphi}{B_t} = Z_t, \quad \text{bzw.} \quad V_t^\varphi = B_t Z_t = \pi_t^A(H), \qquad \text{für } t \leq \tau^\star,$$

da (Z_t) bis zur Zeit $\tau^\star$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist.

D.h. solange noch nicht ausgeübt wurde, muss (wie im Fall einer europäischen Option) der Zahlungsanspruch $H_{\tau^\star} B_{\tau^\star}^{-1}$ repliziert werden.

Beispiel (Hedging)

Sei $T = 2$, B verzinst mit $r = 5\%$ und die Aktie gegeben durch

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
 & & S_2(u_1, u_2) = 26 \\
 & S_1(u_1) = 22 \arrow[ur, dash] \arrow[r, dash] & S_2(u_1, d_2) = 20 \\
S_0 = 20 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
 & S_1(d_1) = 16 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & S_2(d_1, u_2) = 18 \\
 & & S_2(d_1, d_2) = 10
\end{tikzcd}
$$

Beispiel (Hedging)

Wir bestimmen eine Hedging-Strategie φ für $(H_t) = ((21 - S_t)^+)$ bis $\tau^\star$.
Betrachte also nur den oberen Teilbaum.
Es muss gelten: $V_t^\varphi = \pi_t^A(H)$. Bestimme also $p_t := B_t Z_t = \pi_t^A(H)$:

$$\begin{aligned} p_2(u_1, u_2) &= 0, \qquad p_2(u_1, d_2) = 1 \\ p_1(u_1) &= \frac{29}{63}, \quad p_1(d_1) = 5. \end{aligned}$$

Wir bekommen somit als erstes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} p_2(u_1, u_2) &= \alpha_1(u_1) S_2(u_1, u_2) + \beta_1(u_1) B_2, \\ p_2(u_1, d_2) &= \alpha_1(u_1) S_2(u_1, d_2) + \beta_1(u_1) B_2. \end{aligned}$$

Als Lösung erhalten wir

$$\alpha_1(u_1) = \frac{p_2(u_1, u_2) - p_2(u_1, d_2)}{S_2(u_1, u_2) - S_2(u_1, d_2)} = -\frac{1}{6}, \quad \beta_1(u_1) = \frac{5200}{1323}.$$

Beispiel (Hedging)

Beachte, dass für diese Lösung auch gilt:

$$\alpha_1(u_1)S_1(u_1) + \beta_1(u_1)B_1 = p_1(u_1).$$

Zur Zeit $t = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_1(u_1) &= \alpha_0 S_1(u_1) + \beta_0 B_1, \\ p_1(d_1) &= \alpha_0 S_1(d_1) + \beta_0 B_1 \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\alpha_0 = \frac{p_1(u_1) - p_1(d_1)}{S_1(u_1) - S_1(d_1)} = -\frac{143}{189}, \quad \beta_0 = \frac{64660}{3969}.$$

Insgesamt ist $(\alpha_0, \alpha_1(u)), (\beta_0, \beta_1(u))$ die gesuchte Hedging-Strategie bis zur Ausübung der amerikanischen Put-Option.

Hedging amerikanischer Optionen im CRR-Modell

- Wir betrachten das CRR-Modell und den Spezialfall $H_t = h(S_t)$.
- Der Preisprozesses sei (p_t).
- Wir wollen nun eine Hedging-Strategie $\varphi = (\alpha, \beta)$ für (H_t) bestimmen mit $V_0^\varphi = Z_0$. Sei für $t = 0, 1, \dots, T-1$:

$$\begin{aligned}
\alpha_t &:= \frac{p_{t+1}(uS_t) - p_{t+1}(dS_t)}{(u-d)S_t} \\
c_t &:= p_t(S_t) - \frac{1}{1+r}\Big(qp_{t+1}(uS_t) + (1-q)p_{t+1}(dS_t)\Big).
\end{aligned}$$

- Beachte: $c_t \geq 0$.

Hedging amerikanischer Optionen im CRR-Modell

- Interpretation: $(\alpha_t) =$ Investitionsstrategie in das risikobehaftete Wertpapier.
- $(c_t) =$ Konsumstrategie,
- Vermögensprozess (V_t):

$$\begin{aligned} V_0 &:= p_0(S_0) = Z_0 \\ V_{t+1} &:= \alpha_t S_{t+1} + (1+r)(V_t - c_t - \alpha_t S_t). \end{aligned}$$

- Sei $\tau^\star := \min\{t \le T : p_t(S_t) = h(S_t)\}$ der optimale Ausübungszeitpkt.
- Dann gilt für $t < \tau^\star$, dass $c_t = 0$, und V_t ist das Vermögen der Strategie (α_t) zur Zeit t.

Hedging amerikanischer Optionen im CRR-Modell

Theorem 9

Es gilt $V_t = p_t(S_t)$ für $t = 0, 1, \ldots, T$, d.h., (α_t) ist eine Hedging-Strategie für die amerikanische Option (mit Konsummöglichkeit bei nicht-optimaler Ausübung).

Beweis

Induktion nach t. $t = 0$ ist klar. Jetzt: $t \curvearrowright t+1$:

$$\begin{aligned}
V_{t+1} &= \alpha_t S_{t+1} + (1+r)(V_t - c_t - \alpha_t S_t) \\
&= \alpha_t S_{t+1} + (1+r)\Big(\frac{1}{1+r}\big(q p_{t+1}(uS_t) + (1-q)p_{t+1}(dS_t)\big) - \alpha_t S_t\Big) \\
&= \alpha_t(S_{t+1} - (1+r)S_t) + q p_{t+1}(uS_t) + (1-q)p_{t+1}(dS_t) \\
&= \frac{p_{t+1}(uS_t) - p_{t+1}(dS_t)}{(u-d)}(Y_{t+1} - (1+r)) + q p_{t+1}(uS_t) + (1-q)p_{t+1}(dS_t) \\
&= p_{t+1}(uS_t)\Big(\frac{Y_{t+1} - (1+r)}{u-d} + \frac{1+r-d}{u-d}\Big) + \\
&\quad + p_{t+1}(dS_t)\Big(\frac{u-(1+r)}{u-d} - \frac{Y_{t+1} - (1+r)}{u-d}\Big) \\
&= p_{t+1}(uS_t)\frac{Y_{t+1} - d}{u-d} + p_{t+1}(dS_t)\frac{u - Y_{t+1}}{u-d} \\
&= p_{t+1}(S_{t+1}). \quad \square
\end{aligned}$$

Mögliche Fälle

Ausübung vor $\tau^\star$	Hier ist $V_t = p_t(S_t) > h(S_t)$ und $c_t = 0$. Der Verkäufer behält den Gewinn $V_t - h(S_t)$.
Ausübung zu $\tau^\star$	Hier ist $V_{\tau^\star} = p_{\tau^\star}(S_{\tau^\star}) = h(S_{\tau^\star})$. Das Anlagevermögen reicht genau, um den Käufer auszuzahlen. Es bleibt kein Gewinn.
Ausübung nach $\tau^\star$	Hier kann $c_{\tau^\star} > 0$ konsumiert werden, und es startet ein neues Stoppproblem mit weiteren Gewinnmöglichkeiten für den Verkäufer.

Put-Option im CRR-Modell

Lemma 10

Für den Preis $p_t(S_t)$ einer Put-Option gilt:

a) $x \mapsto p_t(x) + x$ *ist nicht-fallend für* $t = 0, \dots, T$,

b) $t \mapsto p_t(x)$ *ist nicht-wachsend für* $x > 0$.

Beweis

Induktion nach t. Zu beachten ist, dass $p_t \geq 0$.
a) Für $t = T$ gilt

$$p_T(x) + x = (K - x)^+ + x = \begin{cases} K, & x \leq K \\ x, & K < x. \end{cases}$$

Induktionsschritt: $t + 1 \curvearrowright t$:

$$p_t(x) \quad = \quad \max\left\{K - x\,,\; \frac{1}{1+r}\big(qp_{t+1}(ux) + (1-q)p_{t+1}(dx)\big)\right\}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} p_t(x) + x \quad &= \quad \max\left\{K\,,\; x + \frac{1}{1+r}\big(qp_{t+1}(ux) + (1-q)p_{t+1}(dx)\big)\right\} \\ &= \quad \max\left\{K, \frac{1}{1+r}\Big(q\big(p_{t+1}(ux) + ux\big) + (1-q)\big(p_{t+1}(dx) + dx\big)\Big)\right\} \end{aligned}$$

wegen

$$\frac{1}{1+r}\big(qu + (1-q)d\big) = 1.$$

Beweis

b) Für T und $T-1$ gilt:

$$\begin{aligned} p_T(x) &= (K-x)^+ \\ &\leq \max\left\{(K-x)^+, \frac{1}{1+r}\big(qp_T(ux)+(1-q)p_T(dx)\big)\right\} = p_{T-1}(x). \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $t, t+1 \curvearrowright t-1, t$:

$$\begin{aligned} p_t(x) &= \max\left\{(K-x)^+\,,\ \frac{1}{1+r}\Big(qp_{t+1}(ux)+(1-q)p_{t+1}(dx)\Big)\right\} \\ &\leq \max\left\{(K-x)^+\,,\ \frac{1}{1+r}\Big(qp_t(ux)+(1-q)p_t(dx)\Big)\right\} = p_{t-1}(x). \end{aligned}$$

$\square$

Put-Option im CRR-Modell

Es ist optimal auszuüben, wenn gilt:

$$K \geq x + \frac{1}{1+r}\left(qp_{t+1}(ux) + (1-q)p_{t+1}(dx)\right).$$

Da der zweite Ausdruck aber nicht-fallend in x ist, können wir

$$x_t^* := \max\left\{x \geq 0 : x + \frac{1}{1+r}\left(qp_{t+1}(ux) + (1-q)p_{t+1}(dx)\right) \leq K\right\}$$

definieren und erhalten für den optimalen Ausübungszeitpunkt

$$\begin{aligned}\tau^\star &= \min\left\{t \in \{0,1,\dots,T\} : p_t(S_t) = (K-S_t)^+\right\} \\ &= \min\left\{t \in \{0,1,\dots,T\} : S_t \leq x_t^*\right\} \wedge T.\end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaft b) gilt $x_0^* \leq x_1^* \leq \cdots \leq x_T^* := K$.