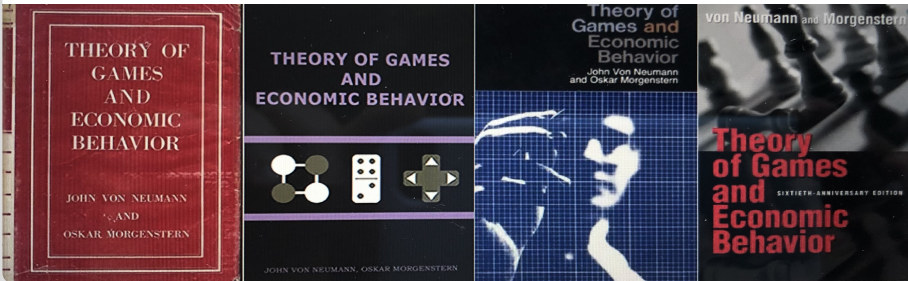


# Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



## 9. Präferenzen

## 9.1 Vorüberlegung

- Betrachte ein arbitragefreies CRR-Modell mit  $T = 1$ .
- Das Anfangsvermögen sei  $x_0 > 0$ .
- Wir lösen

$$\max \mathbb{E} V_1^\varphi \quad \text{s.t.} \quad V_0^\varphi = x_0$$

$\varphi$  sf. Handelsstrategie.

- Es gilt:  $V_1^\varphi = B_1 (V_0^\varphi + \alpha_0 (\frac{S_1}{B_1} - S_0)) = B_1 x_0 + \alpha_0 (S_1 - S_0 B_1)$ .
- Also:  $\mathbb{E} V_1^\varphi = B_1 x_0 + \alpha_0 S_0 (up + d(1 - p) - (1 + r))$ .
- Ist  $up + d(1 - p) > (1 + r)$ , so wählen wir  $\alpha_0$  beliebig groß.
- Ist  $up + d(1 - p) < (1 + r)$ , so wählen wir  $\alpha_0$  beliebig klein.
- $\Rightarrow$  Kriterium ist also nicht sinnvoll.

## 9.2 Erwarteter Nutzen

- Betrachte Lotterien  $L$  mit endlich vielen Auszahlungen  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  und den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten  $p_1, \dots, p_n$ .
- Schreibweise:  $L = (x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ .
- Statt  $L = (x_1; 1)$  schreiben wir auch nur  $x_1$ .
- Finde eine *Präferenzrelation*  $\succ$  auf der Menge der Lotterien, die folgenden Axiome erfüllt:

- *Axiom 1: Vergleichbarkeit.* Für alle  $x_i, x_j \in \mathbb{R}$  gilt:

$$x_i \succ x_j \Leftrightarrow x_i > x_j$$

$$x_j \sim x_i \Leftrightarrow x_i = x_j$$

- *Axiom 2: Monotonie.* Sei  $L_1 = (x_1, x_2; p, 1 - p)$ ,  $L_2 = (x_1, x_2; q, 1 - q)$ .

$$x_1 > x_2 \text{ und } p > q \Leftrightarrow L_1 \succ L_2.$$

- *Axiom 3: Transitivität.*

$$L_1 \succ L_2, L_2 \succ L_3 \Rightarrow L_1 \succ L_3.$$

$$L_1 \sim L_2, L_2 \sim L_3 \Rightarrow L_1 \sim L_3.$$

- *Axiom 4: Stetigkeit.*

$$x_1 \succ x_2 \succ x_3 \Rightarrow \exists U(x_2) \in [0, 1] \text{ mit } L = (x_1, x_3; U(x_2), 1 - U(x_2)) \sim x_2.$$

- *Axiom 5: Austauschbarkeit.* Sei  $L_1 = (x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3)$ .

$$x_2 \sim L_2 = (x_1, x_3; q_1, q_2) \Rightarrow L_1 \sim (x_1, L_2, x_3; p_1, p_2, p_3)$$

- *Axiom 6: Zerlegbarkeit.* Sei  $L_i = (x_1, x_2; p_i, 1 - p_i)$   $i = 1, 2$  und  $L = (L_1, L_2; p, 1 - p)$ , dann gilt:

$$L \sim \tilde{L}(x_1, x_2; pp_1 + (1 - p)p_2, p(1 - p_1) + (1 - p)(1 - p_2)).$$

## Theorem 1

*Ein Investor akzeptiere die Axiome 1-6. Angenommen, es gibt zwei Lotterien  $L_1 = (x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$  und  $L_2 = (x_1, \dots, x_n; q_1, \dots, q_n)$ . Dann gibt es eine wachsende Funktion  $U$ , sodass*

$$L_1 \succ L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n U(x_i) p_i > \sum_{i=1}^n U(x_i) q_i.$$

- Sei o.B.d.A.  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .
- Stetigkeitsaxiom: Für  $i \exists U(x_i)$  mit  $x_i \sim \tilde{L}_i = (x_1, x_n; 1 - U(x_i), U(x_i))$ .
- Offenbar gilt  $U(x_1) = 0$  und  $U(x_n) = 1$ .
- Monotonie:  $\Rightarrow 0 < U(x_i) < 1$ , und  $U(x_i)$  ist wachsend in  $i$ .
- Austauschaxiom und Transitivität: ersetze  $x_i$  durch  $\tilde{L}_i, \forall i$ . Für die so erhaltene Lotterie gilt  $\sim L_1$
- Zerlegbarkeit:  $L_1 \sim L(x_1, x_n, \sum_{i=1}^n p_i(1 - U(x_i)), \sum_{i=1}^n p_i U(x_i))$ .
- Zerlegbarkeit:  $L_2 \sim L(x_1, x_n, \sum_{i=1}^n q_i(1 - U(x_i)), \sum_{i=1}^n q_i U(x_i))$ .
- Monotonieaxiom:

$$L_1 \succ L_2 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n p_i U(x_i) > \sum_{i=1}^n q_i U(x_i).$$



- Die Funktion  $U$  spiegelt also die Präferenz des Investors wider.
- Sie liefert eine numerische Repräsentation der Präferenzrelation  $\succsim$  durch den Wert  $\sum_{i=1}^n p_i U(x_i)$ .
- Dieser kann als Erwartungswert der Auszahlungen (gewichtet mit  $U$ ) interpretiert werden.
- Man bezeichnet  $U$  auch als *Von-Neumann-Morgenstern-Repräsentation* der Präferenzrelation.

Jetzt: Auszahlung ist durch ein beliebiges  $W$ 'maß  $\mu$  auf  $S \subset \mathbb{R}$  gegeben.  
 $S$  ist eine zusammenhängende Borel'sche Teilmenge von  $\mathbb{R}$ .

$\mathcal{P}$  sei eine Menge von  $W$ 'maßen auf  $S$ , mit:

- Für alle  $\mu \in \mathcal{P}$  gilt:  $m(\mu) := \int x\mu(dx) \in \mathbb{R}$ .
- $\delta_x \in \mathcal{P}$  für alle  $x \in S$ , wobei  $\delta_x$  das Dirac-Maß im Punkt  $x$  ist.
- Die Menge  $\mathcal{P}$  ist konvex, d.h.  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$  und  $\alpha \in [0, 1] \Rightarrow \alpha\mu + (1 - \alpha)\nu \in \mathcal{P}$ .

## Definition 2

Eine Präferenzrelation  $\succ$  auf  $\mathcal{P}$  heißt *risikoavers*, falls  $\delta_{m(\mu)} \succ \mu$  für alle  $\mu \in \mathcal{P}$  mit  $\mu \neq \delta_{m(\mu)}$ .

### Theorem 3

*Eine Präferenzrelation  $\succ$  auf  $\mathcal{P}$  mit Von-Neumann-Morgenstern- Repräsentation  $U(\mu) := \int U(x)\mu(dx)$  ist risikoavers  $\Leftrightarrow U$  ist streng konkav.*

- Nach Voraussetzung ist

$$\mu \succ v \Leftrightarrow U(\mu) > U(v) \Leftrightarrow \int U(s)\mu(ds) > \int U(s)v(ds).$$

- "  $\Rightarrow$  " Sei  $\succ$  risikoavers und  $x, y \in S$  mit  $x \neq y$ . Dann gilt für  $\alpha \in (0, 1)$

$$\delta_{\alpha x + (1-\alpha)y} \succ \alpha \delta_x + (1-\alpha)\delta_y.$$

- Daher  $U(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha U(x) + (1-\alpha)U(y)$ . Da  $x \neq y$  und  $\alpha \in (0, 1)$  beliebig war, ist  $U$  streng konkav.

- "  $\Leftarrow$  " Sei nun  $U$  streng konkav. Es folgt

$$U(\delta_{m(\mu)}) = U\left(\int x\mu(dx)\right) \geq \int U(x)\mu(dx) = U(\mu),$$

wobei die Gleichheit nur dann gilt, falls  $\mu = \delta_{m(\mu)}$ . □

## Definition 4

Eine Funktion  $U : S \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Nutzenfunktion*, falls sie streng wachsend, streng konkav und stetig auf  $S$  ist.

- Eine konkave Funktion  $U : S \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Innern von  $S$  immer stetig.
- Für zwei Nutzenfunktionen  $U_1, U_2$  und Konstanten  $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$  ist  $U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$  wieder eine Nutzenfunktion.
- Der Wert der Nutzenfunktion selbst ist nicht relevant.

Typische Nutzenfunktionen sind:

a)  $U(x) = -\exp(-\gamma x)$ ,  $x \in S := \mathbb{R}$ , wobei  $\gamma > 0$ .

b)  $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$  wobei  $\gamma < 1$ ,  $\gamma \neq 0$  und  $S := (0, \infty)$ .

c)  $U(x) = \log(x)$  mit  $S := (0, \infty)$ .

# Sicherheitsäquivalent und Risikoprämie

Sei  $U$  eine Nutzenfunktion.

## Definition 5

a) Das *Sicherheitsäquivalent*  $c(\mu)$  einer Lotterie  $\mu \in \mathcal{P}$  ist gegeben durch

$$U(c(\mu)) = \int U d\mu, \text{ d.h. } c(\mu) = U^{-1} \left( \int U d\mu \right).$$

b) Die *Risikoprämie* von  $\mu$  ist definiert als

$$p(\mu) := m(\mu) - c(\mu).$$

Da  $U(m(\mu)) = U(\delta_{m(\mu)}) \geq U(\mu) = U(c(\mu))$  gilt  $c(\mu) \leq m(\mu)$  und

$$c(\mu) < m(\mu) \Leftrightarrow \mu \neq \delta_{m(\mu)}.$$

## Arrow-Pratt-Risikoaversionskoeffizient

Sei  $U \in C^2(S)$ ,  $Z$  ein Risiko und  $x > 0$  gegeben. Sei  $p(x, Z)$  so, dass

$$U(x + \mathbb{E} Z - p(x, Z)) = \mathbb{E}[U(x + Z)].$$

Sei jetzt  $\mathbb{E} Z = 0$  und  $\text{Var}(Z) = \sigma^2$ . Taylor-Entwicklung liefert:

$$U(x - p) = U(x) - pU'(x) + O(p^2),$$

auf der rechten Seite:

$$\mathbb{E}[U(x+Z)] = \mathbb{E}\left[U(x) + ZU'(x) + \frac{Z^2}{2}U''(x) + O(Z^3)\right] = U(x) + \frac{\sigma^2}{2}U''(x) + o(\sigma^2).$$

Setzen wir nun die beiden Ausdrücke gleich, erhalten wir für die Prämie

$$p(x, Z) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(x) + o(\sigma^2),$$

wobei

$$A(x) = \frac{-U''(x)}{U'(x)}$$

den *absoluten Arrow-Pratt-Risikoaversionskoeffizienten* bezeichnet.

- a) Falls  $A(x)$  konstant ist, dann wird  $U$  als CARA-Nutzenfunktion (constant absolute risk aversion) bezeichnet. Ein Beispiel ist  $U(x) = -e^{-\gamma x}, \gamma > 0$ .
- b) Es gilt:  $A(x)$  ist nicht-negativ wegen der Konkavität und strengen Monotonie von  $U$ .

Sei jetzt  $\tilde{p}(x, Z)$  eine proportionale Risikoprämie, d.h.:

$$\mathbb{E}[U(xZ)] = U(\mathbb{E}[xZ] - x\tilde{p}(x, Z)).$$

Geht man wie oben vor, so folgt

$$\tilde{p}(x, Z) = \frac{1}{2}\sigma^2 R(x) + o(\sigma^2),$$

wobei  $R(x) := xA(x)$  den *relativen Arrow-Pratt Risikoaversionskoeffizienten* bezeichnet.

Falls  $R(x)$  konstant ist, dann heißt  $U$  CRRA-Nutzenfunktion (constant relative risk aversion). Beispiele sind die log- und Potenz-Nutzenfunktion.

## Definition 6

Eine Nutzenfunktion  $U : S \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *HARA*-Nutzenfunktion (hyperbolic absolut risk aversion), falls  $U \in C^2(\mathbb{R})$  und für Konstanten  $a, b$  gilt

$$A(x) = \frac{-U''(x)}{U'(x)} = \frac{1}{ax + b} > 0.$$

## 9.3 Stochastische Dominanz

Im Folgenden sei  $S = \mathbb{R}$ .

## Definition 7

Seien  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ . Dann dominiert  $\mu$  das Maß  $\nu$  im Sinne der *stochastischen Dominanz erster Ordnung*, falls gilt:

$$\int f d\mu \geq \int f d\nu$$

für alle wachsenden Funktionen  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , für die die Erwartungswerte existieren. Bez.  $\mu \succeq_{FSD} \nu$  (FSD=first order stochastic dominance).

## Definition 8

a) Die Funktion

$$F^{-1}(\alpha) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1)$$

wird *Quantilfunktion* der Verteilungsfunktion  $F$  genannt.

b) Sei  $\lambda \in (0, 1)$ . Dann heißt  $q \in \mathbb{R}$  ein  $\lambda$ -Quantil von  $F$ , falls gilt:

$$F(q) \geq \lambda \quad \text{und} \quad F(q-) \leq \lambda,$$

wobei  $F(q-)$  der linksseitige Grenzwert von  $F$  an der Stelle  $q$  ist.

## Lemma 9

Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion mit Quantilfunktion  $F^{-1}$ . Dann gilt:

- a)  $F^{-1}$  ist wachsend und linksseitig stetig.
- b)  $F$  ist stetig  $\Leftrightarrow F^{-1}$  ist streng wachsend.
- c)  $F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y)$  für  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in (0, 1)$ .
- d)  $F$  stetig  $\Rightarrow F(F^{-1}(x)) = x$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

## Lemma 10

Sei  $X$  eine ZV mit Verteilungsfunktion  $F$  und Quantilfunktion  $F^{-1}$ . Weiter sei  $U \sim U(0, 1)$ . Dann gilt:

- a)  $\mathbb{P}(F^{-1}(U) \leq x) = F(x), x \in \mathbb{R}$ , d.h.,  $F^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X$ .
- b) Ist  $F$  stetig, dann ist  $F(X) \sim U(0, 1)$ .

Es seien  $F_\mu(x)$ ,  $F_\nu(x)$  die Verteilungsfunktionen von  $\mu$ ,  $\nu$  und  $F_\mu^{-1}(t)$ ,  $F_\nu^{-1}(t)$  die Quantilfunktionen.

## Theorem 11

*Für  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- $\mu \succeq_{\text{FSD}} \nu$ .
- $F_\mu(x) \leq F_\nu(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .
- $F_\mu^{-1}(t) \geq F_\nu^{-1}(t)$  für alle  $t \in (0, 1)$ .
- Es existieren ZV  $X$  und  $Y$  auf  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  mit Verteilungen  $\mu$  und  $\nu$ , sodass  $X \geq Y$   $\mathbb{P}$ -f.s. gilt.

- $a) \Rightarrow b)$  Betrachte  $f_t(x) = 1_{(t, \infty)}(x)$ .  $f_t$  ist nicht-fallend, und es gilt  $\int f_t(x) \mu(dx) = \mu((t, \infty)) = 1 - F_\mu(t)$ .
- $b) \Rightarrow c)$   $F_\mu(x) \leq F_\nu(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow F_\mu^{-1}(t) \geq F_\nu^{-1}(t)$  für alle  $t \in (0, 1)$ .
- $c) \Rightarrow d)$  Wir wählen  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{B}_{(0,1)}$  und  $\mathbb{P} = \lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $(0, 1)$ . Sei  $U(\omega) = \omega$ . Dann erfüllen  $X = F_\mu^{-1}(U)$  und  $Y = F_\nu^{-1}(U)$  die Bedingungen aus d) (siehe letztes Lemma).
- $d) \Rightarrow a)$  Für jede nicht-fallende Fkt.  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $f(X) \geq f(Y)$ . Mit  $\int f(x) \mu(dx) = \mathbb{E}[f(X)]$  folgt die Behauptung.  $\square$

- a) Es ist offensichtlich, dass  $\succeq_{FSD}$  eine partielle Ordnung auf  $\mathcal{P}$  bildet.
- b) Die Menge aller wachsenden Funktionen in der Definition kann ersetzt werden durch die Menge aller beschränkten, wachsenden, stetigen Funktionen.
- c) Schreibweise:  $X \succeq_{FSD} Y$  für ZV  $X$  und  $Y$ , wenn  $\mu_X \succeq_{FSD} \mu_Y$ .

Betrachte  $\mu = N(a, \sigma^2)$  und  $\nu = N(b, \sigma^2)$ . Dann gilt  $\mu \succeq_{FSD} \nu$  genau dann, wenn

$$F_{\mu}(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \leq \Phi\left(\frac{x-b}{\sigma}\right) = F_{\nu}(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, wobei  $\Phi$  die Verteilungsfunktion von  $N(0, 1)$  ist. Die Ungleichung oben ist offenbar genau dann erfüllt, wenn  $a \geq b$  ist.

## Definition 12

Seien  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ . Dann dominiert  $\mu$  das Maß  $\nu$  im Sinne der *stochastischen Dominanz zweiter Ordnung*, falls gilt:

$$\int U d\mu \geq \int U d\nu,$$

für alle Nutzenfunktionen  $U$  für die die Erwartungswerte existieren. Wir schreiben dafür  $\mu \succeq_{SSD} \nu$ .

$\succeq_{SSD}$  ist eine partielle Ordnung.

## Theorem 13

Für beliebige  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\mu \succeq_{SSD} \nu$ .
- $\int f d\mu \geq \int f d\nu$  für alle wachsenden, konkaven Funktionen  $f$ .
- Für alle  $c \in \mathbb{R}$  gilt  $\int (c - x)^+ \mu(dx) \leq \int (c - x)^+ \nu(dx)$ .
- Für die Verteilungsfunktionen  $F_\mu$  und  $F_\nu$  von  $\mu, \nu$  gilt:

$$\int_{-\infty}^c F_\mu(x) dx \leq \int_{-\infty}^c F_\nu(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Für die Quantilfunktionen  $F_\mu^{-1}$  und  $F_\nu^{-1}$  von  $\mu, \nu$  gilt:

$$\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds \geq \int_0^t F_\nu^{-1}(s) ds, \quad 0 < t \leq 1.$$

a)  $\Rightarrow$  b) : Sei  $U_0$  eine Nutzenfunktion, für die  $\int U_0 d\mu$  und  $\int U_0 d\nu$  endlich sind, etwa

$$U_0(x) := \begin{cases} x - e^{\frac{x}{2}} + 1, & \text{falls } x \leq 0, \\ \sqrt{x+1} - 1, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Sei nun  $f$  eine konkave und wachsende Funktion und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

$$f_n(x) := \frac{n-1}{n} f(x) + \frac{1}{n} U_0(x)$$

eine Nutzenfunktion. Daher gilt

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\nu = \int f d\nu,$$

und die Behauptung ist gezeigt.

$b) \Rightarrow c)$  : Die Funktion  $f(x) := -(c - x)^+$  ist konkav und wachsend.

$c) \Leftrightarrow d)$  : Mit dem Satz von Fubini gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^c F_{\mu}(y) dy &= \int_{-\infty}^c \int_{(-\infty, y]} \mu(dz) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{z \leq y \leq c\}} dy \mu(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}} (c - z)^+ \mu(dz),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

c)  $\Rightarrow$  e) : Sei  $z_\mu$  ein  $t$ -Quantil von  $F_\mu$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds &= \int_0^{F_\mu(z_\mu)} F_\mu^{-1}(s) ds - \int_t^{F_\mu(z_\mu)} F_\mu^{-1}(s) ds \\ &= \int_0^1 F_\mu^{-1}(s) \mathbf{1}_{\{s \leq F_\mu(z_\mu)\}} ds - z_\mu (F_\mu(z_\mu) - t),\end{aligned}$$

Weiter gilt für  $U \sim U(0, 1)$ , dass  $X_\mu := F_\mu^{-1}(U) \sim F_\mu$ .

Außerdem gilt  $s \leq F_\mu(z_\mu) \Leftrightarrow F_\mu^{-1}(s) \leq z_\mu$ . Also erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds &= \mathbb{E} [X_\mu \mathbf{1}_{\{X_\mu \leq z_\mu\}}] - z_\mu (F_\mu(z_\mu) - t) \\ &= - \left( \mathbb{E} [-X_\mu \mathbf{1}_{\{X_\mu \leq z_\mu\}}] + z_\mu F_\mu(z_\mu) - z_\mu t \right) \\ &= - \mathbb{E} [(z_\mu - X_\mu)^+] + z_\mu t.\end{aligned}$$

## Beweis

Nach Voraussetzung gilt  $\forall c \in \mathbb{R}$  und  $t \in (0, 1]$

$$- \mathbb{E} [(c - X_\mu)^+] + ct \geq - \mathbb{E} [(c - X_\nu)^+] + ct.$$

Betrachte

$$f(c) := - \mathbb{E} [(c - X_\mu)^+] + ct = - \int_{-\infty}^c F_\mu(x) dx + ct$$

für  $c \in \mathbb{R}$  und festes  $t$ .

1. Fall:  $c \geq z_\mu$ . Hier gilt

$$f(z_\mu) - f(c) = \int_{z_\mu}^c F_\mu(x) dx + t(z_\mu - c) \geq t(c - z_\mu) - t(c - z_\mu) = 0.$$

2. Fall:  $c \leq z_\mu$ . Hier gilt

$$f(z_\mu) - f(c) = - \int_c^{z_\mu} F_\mu(x) dx + t(z_\mu - c) \geq (t - F_\mu(z_\mu -))(z_\mu - c) \geq 0.$$

Die Ungleichungen sind strikt, sobald  $c$  kein  $t$ -Quantil von  $F_\mu$  ist.  
 Die Funktion  $f$  hat also bei  $c = z_\mu$  eine globale Maximumstelle.

Es folgt:

$$\begin{aligned}\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds &= -\mathbb{E} [(z_\mu - X_\mu)^+] + z_\mu t \geq -\mathbb{E} [(z_\nu - X_\mu)^+] + z_\nu t \\ &\geq -\mathbb{E} [(z_\nu - X_\nu)^+] + z_\nu t = \int_0^t F_\nu^{-1}(s) ds.\end{aligned}$$

e)  $\Rightarrow$  c) : Sei  $c \in \mathbb{R}$  gegeben. Wähle nun  $t$  so, dass  $c$  ein  $t$ -Quantil von  $F_\mu$  ist. Dann folgt nach dem vorigen Teil aus

$$\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds \geq \int_0^t F_\nu^{-1}(s) ds,$$

dass

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}[(c - X_\mu)^+] + ct &= -\mathbb{E}[(z_\mu - X_\mu)^+] + z_\mu t \\ &\geq -\mathbb{E}[(z_\nu - X_\nu)^+] + z_\nu t \\ &\geq -\mathbb{E}[(c - X_\nu)^+] + ct. \end{aligned}$$

## Beweis

c)  $\Rightarrow$  a) : Sei  $f$  streng wachsend und streng konkav.

1. Fall:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Dann  $\exists (f_n) \downarrow f$  mit  $f_n(x) := \min\{0, h_1(x), \dots, h_n(x)\}$ . Somit

$$f_n(x) = - \sum_{i=1}^n \alpha_{in} (\beta_{in} - x)^+$$

mit geeigneten Konstanten  $\alpha_{in} \geq 0, \beta_{in} \in \mathbb{R}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} \int f_n(x) \mu(dx) &= - \sum_{i=1}^n \alpha_{in} \int (\beta_{in} - x)^+ \mu(dx) \\ &\geq - \sum_{i=1}^n \alpha_{in} \int (\beta_{in} - x)^+ \nu(dx) = \int f_n(x) \nu(dx) \end{aligned}$$

und mit monotoner Konvergenz die Behauptung.

2. Fall:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ . Betrachte  $f - c$ .

3. Fall:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ . Betrachte  $f_n(x) = \min\{f(x), n\}$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  und monotoner Konvergenz folgt dann die Behauptung.  $\square$

- a) Sei  $\mu \succeq_{SSD} \nu$ . Wähle  $f(x) = x$  als wachsende, konkave Funktion. Dann folgt  $m(\mu) \geq m(\nu)$ .
- b) Offenbar gilt:  $\mu \succeq_{FSD} \nu \Rightarrow \mu \succeq_{SSD} \nu$ .
- c) Man verwendet auch die Schreibweise  $X \succeq_{SSD} Y$  für Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$ , wenn  $\mu_X \succeq_{SSD} \mu_Y$ .

Es gilt  $N(a, \sigma_1^2) \succeq_{SSD} N(b, \sigma_2^2) \Leftrightarrow a \geq b$  und  $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ .

Beweis: ' $\Rightarrow$ ': Sei zunächst  $\mu := N(a, \sigma_1^2) \succeq_{SSD} N(b, \sigma_2^2) =: \nu$ . Für  $t > 0$  gilt, da  $x \mapsto e^{-tx}$  fallend und konvex ist:

$$e^{-ta+t^2\frac{\sigma_1^2}{2}} = \int e^{-tx} \mu(dx) \leq \int e^{-tx} \nu(dx) = e^{-tb+t^2\frac{\sigma_2^2}{2}}.$$

Also gilt  $a - \frac{1}{2}t\sigma_1^2 \geq b - \frac{1}{2}t\sigma_2^2$ . Mit  $t \downarrow 0$  folgt:  $a \geq b$  mit  $t \rightarrow \infty$ :  $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ .

'  $\Leftarrow$  ' Sei zunächst  $a = b = 0$  und  $X \sim N(0, \sigma_1^2)$  und  $Z \sim N(0, \sigma_2^2 - \sigma_1^2)$  unabhängig. Dann  $Y = X + Z \sim N(0, \sigma_2^2)$ . Für eine Nutzenfunktion  $U$  gilt:

$$\mathbb{E}[U(Y)|X] = \mathbb{E}[U(X + Z)|X] \leq U(\mathbb{E}[X + Z|X]) = U(X).$$

Es folgt

$$\mathbb{E}[U(Y)] \leq \mathbb{E}[U(X)],$$

d.h., nach Definition ist  $X \succeq_{SSD} Y$ .

Sei jetzt  $a \geq b$ . Dann ist  $a + X \sim N(a, \sigma_1^2)$  und  $b + Y \sim N(b, \sigma_2^2)$ . Also folgt

$$\mathbb{E} U(a + X) \geq \mathbb{E} U(b + X) \geq \mathbb{E} U(b + Y).$$

Beachte, dass  $x \mapsto U(b + x)$  wieder eine Nutzenfunktion ist. □

## Theorem 14

*Für beliebige  $\mu, \nu \in \mathcal{P}$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- a)  $\mu \succeq_{SSD} \nu$ .
- b) *Es existieren Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$  mit Verteilungen  $\mu$  und  $\nu$ , sodass  $\mathbb{E}[Y|X] \leq X$   $\mathbb{P}$ -f.s. gilt.*