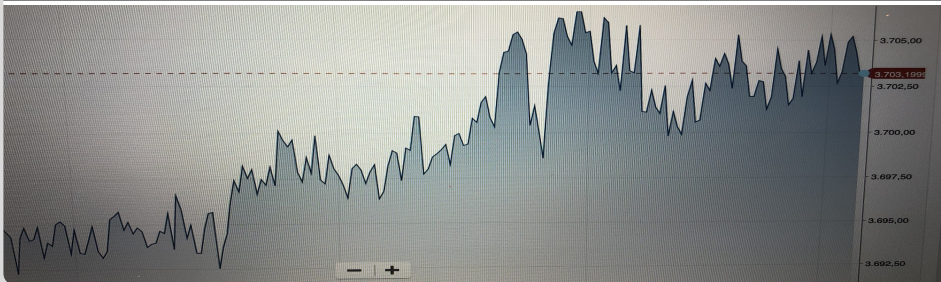


# Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



## 10. Portfoliooptimierung

## 10.1 Die Martingalmethode

- Wir betrachten einen endlichen, arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt.
- Insbesondere ist  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$  und  $\mathcal{F}_T$  die Potenzmenge von  $\Omega$ .
- Sei  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nutzenfunktion mit  $U \in C^1$  und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} U'(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0.$$

(Inada-Bedingung)

- Ist  $U$  nur auf  $(0, \infty)$  definiert, fordern wir  $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = +\infty$ .

Sei  $x_0 > 0$  ein gegebenes Anfangsvermögen.

$$(P) : \quad \max \quad \mathbb{E}[U(V_T^\varphi)] \quad \text{s.t.} \quad V_0^\varphi \leq x_0$$

$\varphi$  sf. Handelsstrategie.

Idee: Zerlege das Optimierungsproblem in

- a)  $\varphi \rightarrow V_T^\varphi$ , d.h., der Handelsstrategie wird eine Zufallsvariable zugeordnet, die das Endvermögen beschreibt.
- b)  $V_T^\varphi \rightarrow \mathbb{E}[U(V_T^\varphi)]$ , d.h., der Zufallsvariablen wird der erwartete Nutzen, also eine reelle Zahl zugeordnet.

Vorgehen:

(i) Löse

$$(\tilde{P}) : \quad \max \mathbb{E}[U(X)] \quad \text{s.t.} \quad X \in \mathcal{X},$$

wobei  $\mathcal{X} := \left\{ X : X \text{ ist } \mathcal{F}_T \text{- messbar, } \mathbb{E}_Q \left[ \frac{X}{B_T} \right] = x_0 \right\}$ .

(ii) Darstellungsproblem:

Sei  $X^*$  eine Lösung von  $(\tilde{P})$ . Bestimme ein sf.  $\varphi^*$  so, dass  $V_T^{\varphi^*} = X^*$ .  
Dann ist  $V_0^{\varphi^*} = x_0$ , und  $\varphi^*$  ist eine optimale Lösung von (P).

- Sei  $Q \in \mathcal{M}^*$ .
- Sei  $Z(\omega) := \frac{1}{B_T} \frac{Q(\{\omega\})}{\mathbb{P}(\{\omega\})}$ .
- Dann ist  $\mathbb{E}_Q\left[\frac{X}{B_T}\right] = \mathbb{E}[XZ]$ .
- Die Lagrange-Funktion für  $X = (X_1, \dots, X_m)$  mit Lagrange-Multiplikator  $y \in \mathbb{R}$  lautet:

$$\begin{aligned}L(X, y) &:= \mathbb{E}[U(X)] - y(\mathbb{E}[ZX] - x_0) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(\{\omega_i\})U(X_i) - y\left(\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(\{\omega_i\})Z_i X_i - x_0\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(\{\omega_i\})(U(X_i) - yZ_i X_i + yx_0).\end{aligned}$$

$$(P) : \quad \max f(x) \quad \text{s.t.} \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, q.$$

Dabei ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  konkav und  $h_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  linear. Lagrange-Funktion:

$$L(x, y) = f(x) + \sum_{j=1}^q y_j h_j(x).$$

## Definition 1

Ein Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+q}$ , der die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$0 = \frac{d}{dx} f(x) + \sum_{j=1}^q y_j \frac{d}{dx} h_j(x),$$

$$0 = h_j(x), \quad j = 1, \dots, q.$$

erfüllt, wird *Karush-Kuhn-Tucker-Punkt* genannt

## Theorem 2

*Ist  $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+q}$  ein Karush-Kuhn-Tucker-Punkt eines differenzierbaren, konkaven Optimierungsproblems, so ist  $x^*$  ein globales Maximum von  $(P)$ .*

Beweis.

- Sei  $(x^*, y^*)$  ein KKT Punkt.
- Dann ist  $L(x^*, y^*) = f(x^*)$ .
- Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiger anderer Punkt, der die Nebenbedingungen erfüllt.
- Dann ist  $L(x, y^*) = f(x)$ .
- Da  $x \mapsto L(x, y)$  konkav ist gilt:

$$f(x) - f(x^*) = L(x, y^*) - L(x^*, y^*) \leq (x - x^*) \frac{d}{dx} L(x^*, y^*) = 0.$$

□

Wir bestimmen jetzt einen *Karush-Kuhn-Tucker-Punkt*  $X^*$  der Lagrange-Funktion zusammen mit einem Lagrange-Multiplikator  $y^*$ :

- (i)  $\frac{d}{dX} L(X^*, y^*) = 0,$
- (ii)  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X^*}{B_T} \right] - x_0 = 0.$

Also:

$$(i) \quad \frac{\partial}{\partial X_i} L(X^*, y^*) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) (U'(X_i^*) - y^* Z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Da  $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$  folgt:

$$U'(X^*) = y^* Z.$$

Sei  $I := (U')^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Da  $U' \neq 0$ , muss  $y^* > 0$  sein und

$$X^* = I(y^*Z).$$

Beachte:  $X^*$  ist eindeutig. Weiter muss  $y^*$  so gewählt werden, dass

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X^*}{B_T} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{I(y^*Z)}{B_T} \right] = \mathbb{E} [Z I(y^*Z)] = x_0.$$

Dies ist möglich, da  $y \mapsto I(yZ)$  wohldefiniert, stetig und fallend ist mit

$$\lim_{y \rightarrow 0} \mathbb{E} [Z I(yZ)] = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \mathbb{E} [Z I(yZ)] = -\infty.$$

## Theorem 3

*Zu  $X^* := I(y^*Z)$  existiert eine Hedging-Strategie  $\varphi^*$ , und  $\varphi^*$  ist eine optimale Lösung des Portfolioproblems (P).*

Beweis.

$X^*$  ist optimal für  $(\tilde{P})$  wegen KKT. Die Existenz einer Hedging-Strategie  $\varphi^*$  ist klar, da der Markt vollständig ist. Außerdem erfüllt  $X^* = V_T^{\varphi^*}$  nach Konstruktion

$$\mathbb{E}_Q \left[ \frac{X^*}{B_T} \right] = x_0.$$

Damit ist  $\varphi^*$  eine optimale Handelsstrategie für  $(P)$ . □

## Beispiel

Sei  $U(x) = -e^{-\gamma x}$  für  $\gamma > 0$ . Dann gilt  $U'(x) = \gamma e^{-\gamma x}$  und daher

$$I(y) := -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y}{\gamma}\right).$$

Für das optimale Endvermögen gilt also

$$X^* = -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y^*}{\gamma} Z\right).$$

Der Lagrange-Multiplikator  $y^*$  erfüllt

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X^*}{B_T} \right] = -\frac{1}{\gamma B_T} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \log\left(\frac{y^*}{\gamma}\right) + \log(Z) \right] \\ &= -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y^*}{\gamma}\right) \frac{1}{B_T} - \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z \log(Z)]. \end{aligned}$$

Also folgt

$$-\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y^*}{\gamma}\right) = \left( x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z \log(Z)] \right) B_T.$$

Daher ist das optimale Endvermögen

$$\begin{aligned} X^* &= -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y^* Z}{\gamma}\right) = -\frac{1}{\gamma} \log(Z) - \frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y^*}{\gamma}\right) \\ &= -\frac{1}{\gamma} \log(Z) + \left(x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z \log(Z)]\right) B_T \end{aligned}$$

und der erwartete Nutzen wegen  $\mathbb{E} Z = \frac{1}{B_T}$

$$\mathbb{E}[U(X^*)] = -\frac{1}{B_T} e^{-\gamma x_0 B_T - B_T \mathbb{E}[Z \log(Z)]}.$$

## Beispiel

Sei jetzt ein  $T$ -periodiges CRR-Modell gegeben mit  $B_t \equiv 1$ . Weiter sei

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{(y_1, \dots, y_T)\}) = p_{y_1} \cdot \dots \cdot p_{y_T},$$

wobei

$$p_{y_t} := \begin{cases} p, & \text{falls } y_t = u, \\ 1 - p, & \text{falls } y_t = d, \end{cases}$$

für ein  $p \in (0, 1)$ . Gesucht: Hedging-Strategie von

$$X^* = -\frac{1}{\gamma} \log(Z) + x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z \log(Z)]$$

Für  $Z$  gilt

$$Z(\omega) = Z((y_1, \dots, y_T)) = \frac{q_{y_1}}{p_{y_1}} \dots \frac{q_{y_T}}{p_{y_T}}.$$

Die Hedging-Strategie zum Zeitpunkt  $T - 1$  bei Vorgeschichte  $h_{T-1} = (y_1, \dots, y_{T-1})$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\alpha_{T-1}^*(h_{T-1}) S_{T-1}(h_{T-1}) &= \frac{X^*(h_{T-1}, u) - X^*(h_{T-1}, d)}{u - d} \\ &= \frac{-\frac{1}{\gamma} \left( \log\left(\frac{q}{p}\right) - \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) \right)}{u - d} =: a^*,\end{aligned}$$

Der Wert des Hedging-Portfolios zur Zeit  $T - 1$  ist

$$\begin{aligned}V_{T-1}^*(h_{T-1}) &= qX^*(h_{T-1}, u) + (1 - q)X^*(h_{T-1}, d) \\ &= x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z \log(Z)] - \frac{1}{\gamma} \log(Z_{T-1}) - \frac{1}{\gamma} \left( q \log\left(\frac{q}{p}\right) + (1 - q) \log\left(\frac{1 - q}{1 - p}\right) \right) \\ &= x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z_{T-1} \log(Z_{T-1})] - \frac{1}{\gamma} \log(Z_{T-1}),\end{aligned}$$

Dabei ist  $Z_t(\omega) = Z((y_1, \dots, y_t)) = \frac{q_{y_1}}{p_{y_1}} \dots \frac{q_{y_t}}{p_{y_t}}$ . Zur Zeit  $T - 2$  gilt:

$$\alpha_{T-2}^*(h_{T-2}) S_{T-2}(h_{T-2}) = \frac{V_{T-1}^*(h_{T-2}, u) - V_{T-1}^*(h_{T-2}, d)}{u - d} = a^*.$$

Durch Induktion nach  $t$  folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_t^*(h_t) S_t(h_t) &= a^* = \frac{\frac{1}{\gamma} \left( \log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) - \log\left(\frac{q}{p}\right) \right)}{u - d} \\ \beta_t^*(h_t) &= \beta_t^*(h_t) B_t = V_t^*(h_t) - \alpha_t^*(h_t) S_t(h_t) = V_t^*(h_t) - a^*, \end{aligned}$$

wobei  $V_t^* = -\frac{1}{\gamma} \log(Z_t) + x_0 + \frac{1}{\gamma} \mathbb{E}[Z_t \log(Z_t)]$  ist. Der maximale Wert von  $(P)$  ist  $\mathbb{E}[U(X^*)] = -e^{-\gamma x_0 - \mathbb{E}[Z \log(Z)]}$ .

## 10.2 Optimale Handelsstrategien mit dynamischer Optimierung

- Wir betrachten einen endlichen, arbitragefreien Finanzmarkt.
- Die Preismodelle der risikobehafteten Wertpapiere sind *Markovsch*.
- $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^S$ .

## Definition 4

Sei  $\varphi = (\alpha, \beta)$  eine sf. Handelsstrategie. Wir definieren  $\phi = (\phi_t^0, \phi_t) = (\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d)$  für  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  durch

$$\begin{aligned}\phi_t^0 &:= \beta_t B_t \\ \phi_t^k &:= \alpha_t^k S_t^k, \quad k = 1, \dots, d.\end{aligned}$$

$\phi_t^k$  ist der *Betrag*, der zur Zeit  $t$  in das Wertpapier  $k$  investiert wird.

- $V_t^\phi = \phi_t^0 + \phi_t^1 + \dots + \phi_t^d$  ist der Portfoliowert der Strategie  $\phi$  zur Zeit  $t$ .
- Weiter sei

$$\frac{B_{t+1}}{B_t} =: 1 + r_{t+1}, \quad \frac{S_{t+1}^k}{S_t^k} =: \tilde{R}_{t+1}^k, \quad \frac{\tilde{R}_t^k}{1 + r_t} - 1 =: R_t^k.$$

- $R_t := (R_t^1, \dots, R_t^d)^T$  und  $e := (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^d$ .
- $\phi$  ist selbstfinanzierend  $\Leftrightarrow \beta_t B_t + \alpha_t \cdot S_t = \beta_{t-1} B_t + \alpha_{t-1} \cdot S_t$ , d.h. also

$$V_t^\phi = \phi_t^0 + \phi_t \cdot e = \phi_{t-1}^0 (1 + r_t) + \phi_{t-1} \cdot \tilde{R}_t.$$

Wegen

$$V_t^\phi - V_{t-1}^\phi = \phi_{t-1}^0(1 + r_t) + \phi_{t-1} \cdot \tilde{R}_t - \phi_{t-1}^0 - \phi_{t-1} \cdot e = \phi_{t-1}^0 r_t + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e)$$

gilt folgende Rekursionsformel für das Vermögen

$$\begin{aligned} V_t^\phi &= V_{t-1}^\phi + (V_t^\phi - V_{t-1}^\phi) = V_{t-1}^\phi + \phi_{t-1}^0 r_t + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e) \\ &= V_{t-1}^\phi + V_{t-1}^\phi r_t - (\phi_{t-1} \cdot e) r_t + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e) \\ &= V_{t-1}^\phi (1 + r_t) + \phi_{t-1} \cdot (\tilde{R}_t - e - e r_t) = (1 + r_t)(V_{t-1}^\phi + \phi_{t-1} \cdot R_t). \end{aligned}$$

# Einperiodige Endnutzenmaximierung

Im Falle  $T = 1$  erhalten wir

$$V_1^\phi = (1 + r_1)(V_0^\phi + \phi_0 \cdot R_1) = (1 + r)(x_0 + a \cdot R),$$

wobei wir  $r := r_1$ ,  $R := R_1$ ,  $x_0 := V_0^\phi$  und  $a := \phi_0$  setzen.

Sei  $L$  der kleinste lineare Unterraum des  $\mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(R \in L) = 1$ .

## Lemma 5

*Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- a) *Es gilt (NA).*
- b)  $\forall a \in \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(a \cdot R \geq 0) = 1$  folgt  $\mathbb{P}(a \cdot R = 0) = 1$ .
- c)  $\forall a \in L$ ,  $a \neq 0$  gilt  $\mathbb{P}(a \cdot R < 0) > 0$ .

"a)  $\Leftrightarrow$  b)". Es existiert eine Arbitragemöglichkeit  $\Leftrightarrow \exists \eta \in \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0) \geq 0) = 1$  und  $\mathbb{P}(\eta \cdot (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0) > 0) > 0$ . Wegen

$$\eta \cdot (\tilde{S}_1 - \tilde{S}_0) = \sum_{k=1}^d \eta_k \left( \frac{S_1^k}{B_1} - S_0^k \right) = \sum_{k=1}^d \eta_k S_0^k R^k = a \cdot R$$

mit  $a_k := \eta_k S_0^k$  existiert eine Arbitragemöglichkeit im Markt  $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(a \cdot R \geq 0) = 1$  und  $\mathbb{P}(a \cdot R > 0) > 0$ .

"b)  $\Leftrightarrow$  c)". Dazu nehmen wir zunächst an, dass c) nicht gilt.

$\exists a \in L, a \neq 0$  mit  $\mathbb{P}(a \cdot R \geq 0) = 1$ . Dann folgt  $a \cdot R(\omega) \neq 0$  für ein  $\omega \in \Omega$ . Also folgt nicht b).

Schließlich nehmen wir an, dass c) gilt. Sei nun  $a \in \mathbb{R}^d$  beliebig. Dann gilt  $a = a_L + a^\perp$  mit  $a_L \in L$  und  $a^\perp \in L^\perp$ . Also ist  $a \cdot R = a_L \cdot R$  und b) gilt. □

Sei  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nutzenfunktion.

Wir betrachten jetzt das folgende Portfolioproblem für  $x_0 > 0$

$$\max \quad \mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + a \cdot R))] \quad \text{s.t.} \quad a \in \mathbb{R}^d.$$

Theorem 6

Sei  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nach oben beschränkte Nutzenfunktion. Dann gilt

$(NA) \Leftrightarrow$  Das Portfolioproblem besitzt eine Lösung.

- a) Das Theorem ist z.B. anwendbar auf  $U(x) = -e^{-\gamma x}$  mit  $\gamma > 0$ .
- b) Ist die Nutzenfunktion nicht nach oben beschränkt, so ist die Aussage im Allgemeinen falsch (vgl. Übung).

" $\Leftarrow$ ". Es gibt eine Arbitragemöglichkeit.

Also  $\exists \eta \in \mathbb{R}^d$  mit  $\mathbb{P}(\eta \cdot R \geq 0) = 1$  und  $\mathbb{P}(\eta \cdot R > 0) > 0$ .  
Sei  $x_0 > 0$  und  $a^*$  ein optimales Portfolio. Dann gilt aber

$$\mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + (\mathbf{a}^* + \eta) \cdot R))] > \mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + \mathbf{a}^* \cdot R))].$$

Das ist ein Widerspruch zur Optimalität von  $\mathbf{a}^*$ .

" $\Rightarrow$ ". Es gibt keine Arbitrage.

- Sei  $v(a) := \mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + a \cdot R))]$ .
- Da  $a \cdot R = (a_L + a^\perp) \cdot R = a_L \cdot R$ , können wir uns auf  $a \in L$  beschränken.
- Sei  $U \leq K \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} v(\lambda a) \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + \lambda a \cdot R)) \mathbf{1}_{\{a \cdot R < 0\}}] + K = -\infty.$$

- Für  $\lambda > 0$  sei

$$F_\lambda := \{a \in L : \|a\| = 1, v(\lambda a) \geq v(0)\}.$$

- Aus der Konkavität von  $v$  folgt für  $\alpha \in (0, 1)$

$$v(\alpha a) - v(0) \geq \alpha(v(a) - v(0)).$$

- Somit:  $F_\lambda \supseteq F_{\lambda'}$  für  $\lambda \leq \lambda'$ .
- Es folgt  $F_\lambda \downarrow \emptyset$ , und  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $F_\lambda = \emptyset$  für alle  $\lambda \geq n_0$ .
- d.h.  $v(a) \leq v(0)$  für alle  $a \in L$  mit  $\|a\| \geq n_0$ .
- Bei der Maximierung können wir uns also auf eine kompakte Menge zurückziehen, und da  $v$  stetig ist, folgt die Existenz einer Lösung.  $\square$

Sei  $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  und definiere:

$$D(x) := \left\{ a \in \mathbb{R}^d : x + a \cdot R(\omega) \geq 0 \text{ für alle } \omega \in \Omega \right\}.$$

Das Portfolioproblem lässt sich dann für  $x_0 > 0$  schreiben als

$$\max \quad \mathbb{E} [U((1+r)(x_0 + a \cdot R))] \quad \text{s.t.} \quad a \in D(x_0).$$

Theorem 7

Sei  $U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nutzenfunktion. Dann gilt:

$(NA) \Leftrightarrow$  Das Portfolioproblem besitzt eine Lösung.

Gibt es eine Arbitragemöglichkeit, so folgt wie im vorigen Beweis (Theorem 10.6), dass keine optimale Handelsstrategie existieren kann.

" $\Rightarrow$ ". Es gibt keine Arbitrage.

Wir zeigen, dass  $D(x_0) \cap L$  kompakt ist. Abgeschlossenheit ist klar.

Beschränktheit: Ann.:  $\exists (a_n) \subset D(x_0) \cap L$  mit  $\|a_n\| \rightarrow \infty$ .

- Wähle Teilfolge  $(a_{n_k})$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} (a_{n_k} / \|a_{n_k}\|) = a^*$ .
- Offenbar ist  $a^* \in L$ ,  $\|a^*\| = 1$ , und da  $a_{n_k} \in D(x_0) \cap L$ , folgt

$$a^* \cdot R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k} \cdot R}{\|a_{n_k}\|} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-x_0}{\|a_{n_k}\|} = 0.$$

- Da  $a^* \neq 0$  folgt  $\mathbb{P}(a^* \cdot R > 0) > 0$ .

Also ist  $a^*$  eine Arbitragemöglichkeit, was ein Widerspruch ist. Die Stetigkeit der Zielfunktion liefert dann die Behauptung. □

# Mehrperiodige Endnutzenmaximierung

- Auf  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  seien die Zufallsvektoren  $R_1 = (R_1^1, \dots, R_1^d), \dots, R_T = (R_T^1, \dots, R_T^d)$  unabhängig.
- Diese Konstruktion führt auf *Markovsche* Preisprozesse, da

$$S_{t+1}^k = \tilde{R}_{t+1}^k S_t^k = (R_{t+1}^k + 1)(r_{t+1} + 1) S_t^k.$$

- Ferner gilt:  $\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_t^S = \sigma(R_1, \dots, R_t)$ ,  $t = 1, \dots, T$ .
- In diesem Fall genügt es, Handelsstrategien zu betrachten mit

$$\phi_t = f_t(V_t^\phi), \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

für messbare Funktionen  $f_t$ .

- $f_t$  nennt man auch *Entscheidungsregel* zur Zeit  $t$ .

## Definition 8

Eine *Investitionspolitik*  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{T-1})$  ist eine Folge von Entscheidungsregeln  $f_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , wobei  $f_t = f_t(x) = (f_t^1(x), \dots, f_t^d(x))$  ist.

Dabei gibt  $f_t^k(x)$  den Betrag an, der zur Zeit  $t$  in das  $k$ -te risikobehaftete Wertpapier investiert wird, in Abhängigkeit vom Vermögen  $x$  zur Zeit  $t$ .

Wählen wir eine Investitionspolitik  $\pi = (f_0, f_1, \dots, f_{T-1})$ , dann ist der Vermögensprozess  $(V_t^\pi)$  mit  $V_0^\pi = x_0$  festgelegt durch:

$$V_0^\pi := x_0$$

$$V_1^\pi := (1 + r_1) \left( x_0 + f_0(x_0) \cdot R_1 \right)$$

$$\vdots$$

$$V_t^\pi := (1 + r_t) \left( V_{t-1}^\pi + f_{t-1}(V_{t-1}^\pi) \cdot R_t \right).$$

Im Folgenden sei  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine nach oben beschränkte Nutzenfunktion. Betrachte:

$$(P) : \quad \max \quad \mathbb{E}[U(V_T^\pi)] \quad \text{s.t.} \quad V_0^\pi = x_0$$

$\pi$  Investitionspolitik.

Dabei ist  $x_0 > 0$  ein gegebenes Anfangsvermögen.

## Definition 9

Es sei  $J_T(x) := U(x)$ , und für  $t = 0, 1, \dots, T - 1$  und  $x \in \mathbb{R}$  sei

$$J_t(x) := \sup_{\pi} \mathbb{E} [U(V_T^{\pi}) | V_t^{\pi} = x].$$

$J_t$  nennt man *Wertfunktion zur Zeit t*. Falls

$$\mathbb{E}[U(V_T^{\pi^*}) | V_0^{\pi^*} = x_0] = J_0(x_0),$$

dann ist  $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$  eine optimale Investitionspolitik für das Problem  $(P)$ .

## Theorem 10

Es gelte (NA). Dann gilt für  $t = T - 1, \dots, 0$

$$J_T(x) = U(x),$$

$$J_t(x) = \sup_f \mathbb{E} \left[ J_{t+1} \left( (1 + r_{t+1})(x + f(x) \cdot R_{t+1}) \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Außerdem gibt es Entscheidungsregeln  $f_t^*$ , die das Supremum jeweils annehmen, und  $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$  ist eine optimale Investitionspolitik.

- $t = T: J_T(x) = U(x)$  nach Definition.
- $t = T - 1: J_{T-1}(x) = \sup_f \mathbb{E} \left[ U((1 + r_T)(x + f(x) \cdot R_T)) \right]$ .
- $J_{T-1}$  ist streng wachsend, streng konkav und nach oben beschränkt.
- Die Existenz der Maximumstellen  $f_{T-1}^*$  folgt aus Theorem 10.6.

Es sei

$$M := \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : v \text{ ist streng wachsend, streng konkav und nach oben beschränkt}\}.$$

Definiere  $\mathbf{T}_t, \mathbf{T}_{tf}$  für beliebige Entscheidungsregeln  $f$  auf  $M$  durch:

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}_{tf}v)(x) &:= \mathbb{E} \left[ v((1 + r_{t+1})(x + f(x) \cdot R_{t+1})) \right] \\ (\mathbf{T}_t v)(x) &:= \sup_f (\mathbf{T}_{tf}v)(x). \end{aligned}$$

- Es gilt:  $\mathbf{T}_t : M \rightarrow M$ .
- Also existieren nach Theorem 10.6 die Maximumstellen  $f_t^*$ .

Sei jetzt  $t < T - 1$ . Wir zeigen durch Induktion:

$$\mathbb{E}[U(V_T^{\pi^*}) | V_t^{\pi^*} = x] = \mathbf{T}_t J_{t+1}(x) = J_t(x).$$

Gelte die Aussage für  $T, \dots, t + 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(V_T^{\pi^*}) | V_t^{\pi^*} = x] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(V_T^{\pi^*}) | V_{t+1}^{\pi^*}] | V_t^{\pi^*} = x] \\ &= \mathbb{E}[J_{t+1}(V_{t+1}^{\pi^*}) | V_t^{\pi^*} = x] \\ &= \mathbb{E}\left[J_{t+1}\left((1 + r_{t+1})(x + f_t^*(x) \cdot R_{t+1})\right)\right] \\ &= \mathbf{T}_{tf_t^*} J_{t+1}(x) = \mathbf{T}_t J_{t+1}(x).\end{aligned}$$

Supremum über alle Politiken:  $J_t \geq \mathbf{T}_t J_{t+1}$ .

Andererseits gilt für eine beliebige Politik  $\pi = (f_0, \dots, f_{T-1})$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U(V_T^\pi) | V_t^\pi = x] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(V_T^\pi) | V_{t+1}^\pi] | V_t^\pi = x] \\ &\leq \mathbb{E}[J_{t+1}(V_{t+1}^\pi) | V_t^\pi = x] = \\ &= \mathbb{E}\left[J_{t+1}\left((1 + r_{t+1})(x + f_t(x) \cdot R_{t+1})\right)\right] \\ &= \mathbf{T}_{ff_t} J_{t+1}(x) \leq \mathbf{T}_t J_{t+1}(x).\end{aligned}$$

Supremum über alle  $\pi$ , dann gilt  $J_t \leq \mathbf{T}_t J_{t+1}$  für alle  $t$ .  
Insgesamt folgt also die Behauptung. □

Sei  $d = 1$  und  $U(x) = -e^{-\gamma x}$  für ein  $\gamma > 0$ . Wir berechnen die optimale Investitionspolitik und die Wertfunktion. Beginne bei  $T$ :

$$J_T(x) = U(x) = -e^{-\gamma x}.$$

Die Bellman-Gleichung liefert dann

$$\begin{aligned} J_{T-1}(x) &= \sup_f \mathbb{E} \left[ U((1+r_T)(x + f(x)R_T)) \right] \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ -\exp(-\gamma(1+r_T)(x + aR_T)) \right] \\ &= -e^{-\gamma(1+r_T)x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [e^{-\gamma(1+r_T)aR_T}]. \end{aligned}$$

## Beispiel

Wir definieren nun:  $d_{T-1} := \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[e^{-\gamma(1+r_T)aR_T}]$ . Ansatz:

$$J_t(x) = -d_t \cdot \dots \cdot d_T \exp\left(-\gamma \frac{B_T}{B_t} x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

mit Konstanten  $d_t > 0$ . Offenbar ist  $d_T = 1$ . Für  $t+1 \curvearrowright t$  gilt:

$$\begin{aligned} J_t(x) &= \sup_f \mathbb{E} \left[ J_{t+1} \left( (1+r_{t+1})(x + f(x)R_{t+1}) \right) \right] \\ &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ -d_{t+1} \cdot \dots \cdot d_T \exp\left(-\gamma \frac{B_T}{B_{t+1}} (1+r_{t+1})(x + aR_{t+1})\right) \right] \\ &= -d_{t+1} \cdot \dots \cdot d_T e^{-\gamma \frac{B_T}{B_t} x} \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \exp\left(-\gamma \frac{B_T}{B_t} aR_{t+1}\right) \right] \\ &= -d_t \cdot \dots \cdot d_T e^{-\gamma \frac{B_T}{B_t} x} \end{aligned}$$

mit  $d_t := \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \exp\left(-\gamma \frac{B_T}{B_t} aR_{t+1}\right) \right]$ . Insbesondere ist

$$J_0(x_0) = -d_0 \cdot \dots \cdot d_T \exp\left(-\gamma B_T x_0\right).$$

- Die optimale Investitionspolitik ist durch die Maximumstellen in der Bellman-Gleichung gegeben.
- Ist  $B_t \equiv 1$  und sind die  $R_1, \dots, R_T$  identisch verteilt, so ist die optimale Investitionspolitik  $f_t^*(x) \equiv a^*$  (unabhängig von  $t$  und  $x$ ), wobei  $a^*$  eine Minimumstelle ist von

$$\inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \exp \left( -\gamma a R_1 \right) \right].$$