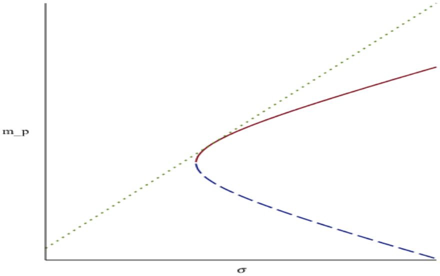
Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



11. Erwartungswert-Varianz-Portfolios

Notationen und Annahmen

- d risikobehaftete Wertpapiere, mit $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^d) \in \mathbb{R}^d$.
- Die Preise zum Zeitpunkt T: Zufallsvektor $S_T = (S_T^1, \dots, S_T^d)$.
- Zufälligen Renditen $R_T^k := \frac{S_T^k}{S_0^k} - 1, \quad k = 1, \dots, d$.
- $\mathbb{E}[R_T^k] = m_k, \quad k = 1, \dots, d$.
- $Cov(R_T^k, R_T^j) = \sigma_{kj} \quad k, j = 1, \dots, d$ existieren.
- $m = (m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{R}^d$ und $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$ seien linear unabhängig.
- $\Sigma = (\sigma_{kj})$ sei positiv definit.

Definition 1

Gegeben sei ein Investor mit Anfangsvermögen $x_0 > 0$, der α_0^k Stück des Wertpapiers k besitzt, $k = 1, \dots, d$, wobei

$$\sum_{k=1}^{d} \alpha_0^k S_0^k = x_0. \quad \text{(Budgetgleichung)}$$

Dann bezeichnet $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_d)$ mit

$$\pi_k := \frac{\alpha_0^k S_0^k}{x_0}, \quad k = 1, \dots, d$$

das *Portfolio* und

$$R^\pi := \sum_{k=1}^{d} \pi_k R_T^k$$

die *Portfoliorendite*.

Erwartungswert und Varianz der Portfoliorendite

Es gilt:

$$\sum_{k=1}^{d} \pi_k = \frac{1}{x_0} \sum_{k=1}^{d} \alpha_0^k S_0^k = 1.$$

Erwartungswert und Varianz der Portfoliorendite sind

$$\mathbb{E}[R^\pi] = \sum_{k=1}^{d} \pi_k m_k =: m(\pi), \quad Var(R^\pi) = \sum_{k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} \pi_k \sigma_{kj} \pi_j =: \sigma^2(\pi).$$

Sei $V_T^\varphi = \sum_{k=1}^{d} \alpha_0^k S_T^k$. Dann ist

$$R^\pi = \sum_{k=1}^{d} \pi_k R_T^k = \sum_{k=1}^{d} \frac{\alpha_0^k S_0^k}{x_0} \Big(\frac{S_T^k}{S_0^k} - 1 \Big) = \frac{V_T^\varphi}{x_0} - 1.$$

11.1 Portfoliooptimierung nach Markowitz bzw. de Finetti

Grenzportfolio

Definition 2

Ein Portfolio heißt *Grenzportfolio*, wenn es unter allen Portfolios mit gleicher Rendite die kleinste Varianz hat.
Die Menge aller Grenzportfolios wird *Portfoliogrenze* genannt.

Optimierungsproblem

Sei m_p die (vorgegebene) Portfoliorendite, so ist $\pi^\star$ ein Grenzportfolio $\Leftrightarrow$ $\pi^\star$ ist eine Lösung von:

$$(P): \qquad \min \quad \frac{1}{2} Var(R^\pi) \qquad \text{s.t.} \qquad \mathbb{E}[R^\pi] = m_p, \quad \pi \cdot e = 1.$$

bzw.

$$(P): \qquad \min \quad \frac{1}{2} \pi^T \Sigma \pi \qquad \text{s.t.} \qquad \pi \cdot m = m_p, \quad \pi \cdot e = 1.$$

Lagrange-Funktion

Langrange-Funktion

$$L(\pi, y_1, y_2) := \frac{1}{2}\pi^\top \Sigma \pi - y_1(\pi \cdot m - m_p) - y_2(\pi \cdot e - 1)$$

Gesucht: KKT-Punkt $\pi^\star$ mit Lagrange-Multiplikator $(y_1^\star, y_2^\star)$:

(i) $\frac{d}{d\pi} L(\pi^\star, y_1^\star, y_2^\star) = \Sigma\pi^\star - y_1^\star m - y_2^\star e = 0,$

(ii) $\pi^\star \cdot m = m_p,$

(iii) $\pi^\star \cdot e = 1.$

Aus der ersten Gleichung folgt

$$\pi^\star = y_1^\star \Sigma^{-1} m + y_2^\star \Sigma^{-1} e.$$

Bestimmung Lagrange-Multiplikatoren

Es folgt:

$$m_p = m \cdot \pi^\star = y_1^\star m^\top \Sigma^{-1} m + y_2^\star m^\top \Sigma^{-1} e.$$

Weiter gilt:

$$1 = e \cdot \pi^\star = y_1^\star e^\top \Sigma^{-1} m + y_2^\star e^\top \Sigma^{-1} e.$$

Bestimme $y_1^\star$ und $y_2^\star$ aus LGS. Seien dazu

$$\begin{aligned} A &:= m^\top \Sigma^{-1} e = e^\top \Sigma^{-1} m, \\ B &:= m^\top \Sigma^{-1} m, \\ C &:= e^\top \Sigma^{-1} e, \\ D &:= BC - A^2. \end{aligned}$$

Bestimmung Lagrange-Multiplikatoren

Beachte, dass $B, C > 0$. Da m und e linear unabhängig sind, gilt $Cm - Ae \neq 0$ und damit auch $D > 0$ wegen

$$\begin{aligned} 0 &< (Cm - Ae)^\top \Sigma^{-1} (Cm - Ae) \\ &= C^2 m^\top \Sigma^{-1} m - 2AC m^\top \Sigma^{-1} e + A^2 e^\top \Sigma^{-1} e \\ &= C^2 B - 2A^2 C + A^2 C = C(BC - A^2) = CD. \end{aligned}$$

LGS in Matrix-Vektor-Form

$$\begin{pmatrix} B & A \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^\star \\ y_2^\star \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit Lösung

$$y_1^\star = \frac{Cm_p - A}{D}, \quad y_2^\star = \frac{B - Am_p}{D}.$$

Optimales Portfolio: Two Fund-Separation

Für das optimale Portfolio von (P) gilt

$$\pi^\star := \frac{Cm_p - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - Am_p}{D}\Sigma^{-1}e.$$

Das kann man auch schreiben als

$$\begin{aligned}\pi^\star &= g + hm_p, \quad \text{mit}\\ g &:= \frac{1}{D}\left(-A\Sigma^{-1}m + B\Sigma^{-1}e\right),\\ h &:= \frac{1}{D}\left(C\Sigma^{-1}m - A\Sigma^{-1}e\right).\end{aligned}$$

Für $m_p = 0$ ist $\pi^\star = g$. Für $m_p = 1$ ist $\pi^\star = g + h$. Für beliebiges m_p gilt

$$\pi^\star = g + h\, m_p = (1 - m_p)g + m_p(g + h). \quad \text{Two-Fund Separation}$$

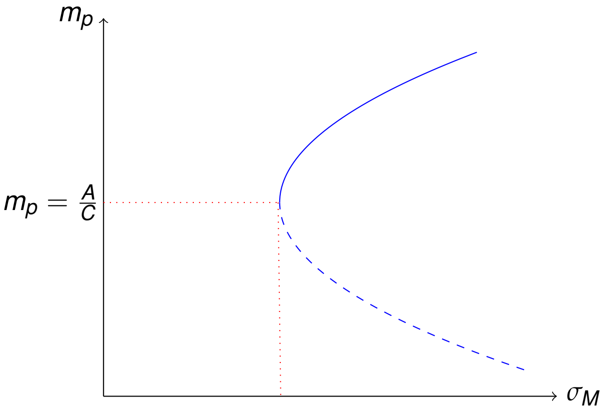
Minimale Varianz

Einsetzen von $\pi^\star$ in die Varianz liefert

$$\sigma_M^2(m_p) := \pi^{\star\top}\Sigma\pi^\star = \frac{B}{D} - 2m_p\frac{A}{D} + m_p^2\frac{C}{D} = \frac{C}{D}\left(m_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}.$$

Die globale minimale Varianz $\frac{1}{C}$ wird bei $m_p = \frac{A}{C}$ erreicht.

Portfoliogrenze in der (σ_M, m_p)-Ebene.



Bemerkungen

a) Das Portfolio mit der kleinsten Varianz auf der Portfoliogrenze wird Minimum-Varianz-Portfolio *MVP* genannt. Es wird bei $m_p = \frac{A}{C}$ erreicht und hat die minimale Varianz $\frac{1}{C}$. Das zugehörige optimale Portfolio ist gegeben durch $\pi^*_{MVP} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}e$.

b) Ein Grenzportfolio ist genau dann *effizient*, wenn es eine echt größere erwartete Rendite als das MVP hat.

c) Ein Portfolio, das weder MVP noch effizient ist, heißt *ineffizient*.

d) Die Effizienzgrenze ist der Teil der Kurve, der oberhalb des globalen Minimums der Varianz liegt.

Grenzportfolios

Theorem 3

Seien Σ positiv definit und m und e linear unabhängig. Dann ist π ein Grenzportfolio $\Leftrightarrow$

$$\sigma_M^2(m_p) := \pi^\top \Sigma \pi = \frac{C}{D}\left(m_p - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C},$$

wobei $A = m^\top \Sigma^{-1} e$, $B = m^\top \Sigma^{-1} m$, $C = e^\top \Sigma^{-1} e$, $D = BC – A^2$. Die Hyperbel in der (σ_M, m_p)-Ebene ist die Portfoliogrenze. Effiziente Portfolios sind Portfolios auf der Portfoliogrenze mit erwarteter Rendite $m_p > \frac{A}{C}$.

MV-Relation

Die zugehörige Relation auf der Menge der Renditeverteilungen:

$$\mu \succeq_{MV} \nu :\Longleftrightarrow m(\mu) \geq m(\nu) \text{ und } Var(\mu) \leq Var(\nu),$$

wobei

$$m(\mu) := \int x\mu(dx),$$
$$Var(\mu) := \int (x - m(\mu))^2 \mu(dx) = \int x^2 \mu(dx) - m(\mu)^2.$$

Falls μ und ν Normalverteilungen sind, dann sind $\succeq_{MV}$ und $\succeq_{SSD}$ äquivalent sind. Das gilt allerdings nicht immer.

11.2 Portfoliooptimierung mit einem risikolosen Wertpapier

Voraussetzungen

- d risikobehaftete Wertpapiere, ein risikoloses Wertpapier.
- Preise des risikolosen Wertpapiers zur Zeit $t = 0$ und zur Zeit $t = T$ seien B_0 und B_T.
- Kovarianzmatrix Σ der d risikobehafteten Wertpapiere ist positiv definit.
- Da $Cov(B_T, S_T^k) = 0$ für alle $k = 1, \dots, d$ ist, ist die erweiterte Kovarianzmatrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Sigma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$
ist jetzt singulär.
- Sei $R_T^0 = \frac{B_T}{B_0} - 1 =: R^0$ und nehme an, dass $R^0 e \neq m$.

Das Optimierungsproblem

- Sei $(\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ der Portfoliovektor.
- Es sei $\pi_0 + \sum_{k=1}^d \pi_k = \pi_0 + \pi \cdot e = 1$.
- Also $\pi_0 = 1 - \pi \cdot e$ und

$$R^\pi = \sum_{k=0}^d \pi_k R_T^k = \sum_{k=1}^d \pi_k R_T^k + (1 - \sum_{k=1}^d \pi_k) R^0$$

- $\mathbb{E}[R^\pi] = \pi \cdot m + R^0(1 - \pi \cdot e) = \pi \cdot (m - R^0 e) + R^0$.
- $Var(R^\pi) = \pi^\top \Sigma \pi$.

Sei m_p die Zielrendite, so ist das Optimierungsproblem jetzt

$$(P): \qquad \min \qquad \frac{1}{2}\pi^\top \Sigma \pi \qquad \text{s.t.} \qquad \pi \cdot (m - R^0 e) + R^0 = m_p.$$

Lagrange-Funktion

Lagrange-Funktion

$$L(\pi, y) := \frac{1}{2}\pi^\top \Sigma \pi - y\big(\pi \cdot (m - R^0 e) + R^0 - m_p\big).$$

Einen KKT-Punkt $\pi^\star$ mit Lagrange-Multiplikator $y^\star$ erhalten wir durch:

(i) $\frac{d}{d\pi} L(\pi^\star, y^\star) = \Sigma \pi^\star - y^\star (m - R^0 e) = 0,$

(ii) $\pi^\star \cdot (m - R^0 e) + R^0 = m_p.$

Erste Gleichung ergibt:

$$\pi^\star = y^\star \Sigma^{-1}(m - R^0 e) =: y^\star b,$$

mit $b \neq 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$m_p = R^0 + \pi^\star \cdot (m - R^0 e) = R^0 + y^\star (m - R^0 e)^\top \Sigma^{-1}(m - R^0 e),$$

also

$$y^\star = \frac{m_p - R^0}{(m - R^0 e)^\top \Sigma^{-1}(m - R^0 e)} = \frac{m_p - R^0}{b \cdot m - R^0 b \cdot e}.$$

Optimales Portfolio

Damit ist das optimale Portfolio (für die Investitionen in die risikobehafteten Wertpapiere) gegeben durch

$$\pi^\star = y^\star b = \frac{m_p - R^0}{b \cdot m - R^0 b \cdot e} b.$$

Umformung optimales Portfolio

$\pi^\star$ ist eine lineare Funktion von m_p. Falls
$e \cdot b = e^\top \Sigma^{-1}(m - R^0 e) = e^\top \Sigma^{-1} m - R^0 e^\top \Sigma e = A - R^0 C \neq 0$ gilt, folgt:

$$\pi^\star = y^\star b =: \alpha^\star \frac{b}{e \cdot b} =: \alpha^\star \pi^\star_{\text{Tang}}$$

mit

$$\alpha^\star = y^\star e \cdot b = \frac{(m_p - R^0) b \cdot e}{b \cdot m - R^0 b \cdot e} = \frac{m_p - R^0}{m \cdot \pi^\star_{\text{Tang}} - R^0}$$

und

$$\pi^\star_{\text{Tang}} = \frac{b}{e \cdot b} = \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{A - R^0 C}.$$

Tangentialportfolio

Weiter gilt:

$$\pi_0 = 1 - e \cdot \pi^\star = 1 - \alpha^\star \frac{e \cdot b}{e \cdot b} = 1 - \alpha^\star.$$

Definition 4

Das Portfolio

$$\pi^\star_{\text{Tang}} := \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{A - R^0 C}$$

heißt *Tangentialportfolio* (oder auch Marktportfolio).

Beachte, dass $e \cdot \pi^\star_{\text{Tang}} = \frac{e \cdot b}{e \cdot b} = 1$, und damit ist $\pi^\star_{\text{Tang}}$ ein Portfoliovektor im ursprünglichen Markowitz-Problem.

One-Fund Theorem

Karlsruher Institut für Technologie

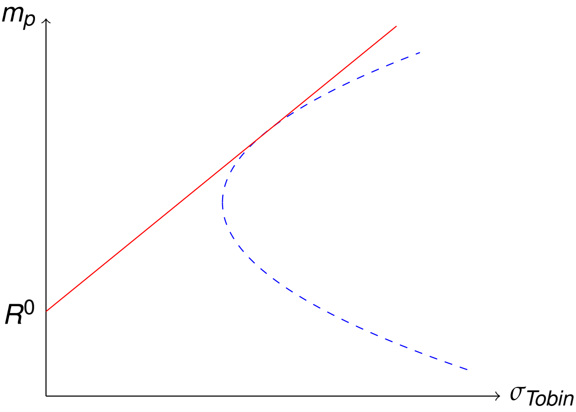
- Das Tangentialportfolio $\pi^{\star}_{\text{Tang}}$ hängt nicht von m_p ab!
- Die Wahl eines effizienten Portfolios bedeutet also, dass die Präferenzen des Investors nur durch seine Wahl des Anteils $1-\alpha^{\star}$, den er risikolos investiert, ausgedrückt werden.
- One-Fund-Theorem: Jedes effiziente Portfolio kann als Kombination aus dem Fund und dem risikolosen Wertpapier konstruiert werden.

Minimale Varianz

Die minimale Varianz ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{Tobin}}(m_p) \quad &:= \quad (\alpha^\star)^2 {\pi^\star_{\text{Tang}}}^\top \Sigma \pi^\star_{\text{Tang}} = \frac{(m_p - R^0)^2}{D\left(\frac{C}{D}(R^0 - \frac{A}{C})^2 + \frac{1}{C}\right)} \\ &= \quad \frac{(m_p - R^0)^2}{D\sigma^2_M(R^0)}.\end{aligned}$$

Kapitalmarktlinie im Tobin-Modell in der $(\sigma_{\mathbf{Tobin}}, m_p)$-Ebene



Grenzportfolios

Theorem 5

Sei Σ positiv definit, $m \neq R^0 e$ und $A - R^0 C \neq 0$. Im Markt mit einem risikolosen Wertpapier ist ein Portfolio ein Grenzportfolio $\Leftrightarrow$

$$\sigma_{Tobin} = |\alpha^\star| \sqrt{{\pi^\star_{Tang}}^\top \Sigma \pi^\star_{Tang}} = \left| \frac{m_p - R^0}{m \cdot \pi^\star_{Tang} - R^0} \right| \sqrt{{\pi^\star_{Tang}}^\top \Sigma \pi^\star_{Tang}}.$$

Effizient sind alle Portfolios auf der so beschriebenen Portfoliogrenze, deren erwartete Rendite größer R^0 ist.

Kapitalmarktlinie

Definition 6
Die effizienten Portfolios liegen auf der sogenannten *Kapitalmarktlinie*

$$m_p = R^0 + \sigma_{\text{Tobin}} \frac{|m \cdot \pi^\star_{\text{Tang}} - R^0|}{\sqrt{{\pi^\star_{\text{Tang}}}^\top \Sigma \pi^\star_{\text{Tang}}}}.$$

Der Faktor $\frac{|m \cdot \pi^\star_{\text{Tang}} - R^0|}{\sqrt{{\pi^\star_{\text{Tang}}}^\top \Sigma \pi^\star_{\text{Tang}}}}$ wird *Marktrisikoprämie* (oder auch Sharpe-Ratio) genannt. Er entspricht der Steigung der Kapitalmarktlinie.

Bemerkungen

a) Für das optimale Markowitz-Portfolio gilt:

$$\pi_M(m_p) = \frac{Cm_p - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - Am_p}{D}\Sigma^{-1}e.$$

Falls $A \neq R^0 C$, gilt für das Tangentialportfolio:

$$\pi^\star_{\mathrm{Tang}} = \frac{1}{A - R^0 C}\Sigma^{-1}m - \frac{R^0}{A - R^0 C}\Sigma^{-1}e$$

und $m^\star := m \cdot \pi^\star_{\mathrm{Tang}} = \frac{B - R^0 A}{A - R^0 C}$. Falls $A - R^0 C > 0$, gilt $m^\star > R^0$ (Umformung ergibt $m^\star > R^0 \Leftrightarrow (m - R^0 e)^\top \Sigma^{-1}(m - R^0 e) > 0$). In diesem Fall ist das Tangentialportfolio effizient, und es gilt

$$\pi_M(m^\star) = \pi^\star_{\mathrm{Tang}}.$$

Insbesondere folgt $\alpha^\star = 1$ und $\sigma_M(m^\star) = \sigma_{\mathrm{Tobin}}(m^\star)$. Man kann auch nachrechnen, dass $\sigma'_M(m^\star) = \sigma'_{\mathrm{Tobin}}(m^\star)$, d.h., im Punkt $m^\star$ berühren sich die Portfoliogrenze und die Kapitalmarktlinie tangential.

Bemerkungen

b) Falls $R^0 = \frac{A}{C}$, gilt

$$e \cdot b = e^\top \Sigma^{-1}(m - R^0 e) = e^\top \Sigma^{-1} m - R^0 e^\top \Sigma e = A - R^0 C = 0,$$

und es gibt kein Tangentialportfolio. Weiter ist $\pi_0 = 1$, d.h., das gesamte Vermögen wird risikolos investiert und das *Zero-Wealth-Portfolio* der risikobehafteten Wertpapiere ist

$$\pi_{\text{zero}} = \frac{m_p - R^0}{b \cdot m} b = \frac{m_p - R^0}{B - R^0 A} b.$$

Es wird durch Kauf und Verkauf der verschiedenen Wertpapiere erzeugt.