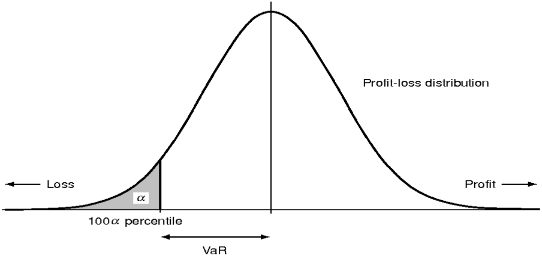
Finanzmathematik in diskreter Zeit

Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Institut für Stochastik (STOCH)



12. Risikomaße

Grundlagen der Risikomessung

Monetäres Risikomaß

- Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein beliebiger Wahrscheinlichkeitsraum.
- $L^1 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X$ ist eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}\,|X| < \infty\}$.
- $X(\omega) =$ diskontierte Nettowert einer Position am Ende einer Handelsperiode.

Definition 1

Eine Abbildung $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ wird *monetäres Risikomaß* genannt, falls für $X, Y \in L^1$ gilt:

a) Monotonie: Falls $X \leq Y$, dann gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.

b) Translationsinvarianz: $\rho(X + m) = \rho(X) - m$ für alle $m \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen

a) Monotonie: Das Downside-Risiko einer Position ist reduziert, wenn das Auszahlungsprofil größer ist.

b) Translationsinvarianz: $\rho(X)$ kann als Kapitalanforderung im Sinne einer Aufsichtsinstanz interpretiert werden. Wenn $m \in \mathbb{R}$ zu der Position hinzugefügt und risikofrei investiert wird, reduziert das die Kapitalanforderung um den gleichen Betrag.

Aus der Translationsinvarianz folgt sofort

a) $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$,

b) $\rho(m) = \rho(0 + m) = \rho(0) - m$ für alle $m \in \mathbb{R}$.

Manchmal fordert man, dass ρ normiert ist, d.h. $\rho(0) = 0$.

Weitere Eigenschaften

Definition 2

Ein monetäres Risikomaß $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ heißt *verteilungsinvariant*, falls $\rho(X) = \rho(Y)$, wenn X und Y dieselbe Verteilung haben.

Weitere Eigenschaften

Definition 3

Ein monetäres Risikomaß $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ heißt *konvexes Risikomaß*, falls für $0 \leq \lambda \leq 1$ und $X, Y \in L^1$

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y),$$

Weitere Eigenschaften

Falls ρ konvex und normiert ist, dann gilt

a) $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$ für $\lambda \in [0, 1]$, da $\rho(\lambda X) = \rho(\lambda X + (1 - \lambda)0) \leq \lambda \rho(X)$.

b) $\rho(\lambda X) \geq \lambda \rho(X)$ für $\lambda \geq 1$, da $\rho(X) = \rho(\frac{1}{\lambda}(\lambda X) + \frac{\lambda - 1}{\lambda} 0) \leq \frac{1}{\lambda} \rho(\lambda X)$.

Definition 4

Ein monetäres Risikomaß ρ heißt *kohärentes Risikomaß*, falls es konvex und positiv homogen ist, d.h., falls es konvex ist und für alle $\lambda \geq 0$ gilt $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$.

Bemerkungen

a) ρ positiv homogen $\Rightarrow \rho$ normiert, da $\rho(0) = \rho(\lambda \cdot 0) = \lambda\rho(0)$.

b) Sei ρ positiv homogen. Dann gilt: ρ konvex $\Leftrightarrow \rho$ *subadditiv* d.h.
$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
Beweis : Sei ρ positiv homogen und konvex.
$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho(X + Y) = \rho(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y) \leq \frac{1}{2}\rho(X) + \frac{1}{2}\rho(Y)$. Also ρ subadditiv.
Sei nun ρ subadditiv und positiv homogen und $0 \leq \lambda \leq 1$.
$\Rightarrow \rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1 - \lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$.
Daher ist ρ konvex.

c) Die Subadditivitätseigenschaft erlaubt es, das Risikomanagement zu dezentralisieren. Das Risiko der Gesamtposition ist nach oben durch die Summe der individuellen Risiken begrenzt.

d) In vielen Situationen wächst das Risiko nicht linear. Daher ist die positive Homogenität häufig eine zu starke Forderung.

Value at Risk

λ-Quantile

Die Menge aller λ-Quantile von X ist ein Intervall $[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)]$ mit

$$q_X^-(\lambda) = \sup\{x : \mathbb{P}(X < x) < \lambda\} = \inf\{x : \mathbb{P}(X \leq x) \geq \lambda\},$$
$$q_X^+(\lambda) = \inf\{x : \mathbb{P}(X \leq x) > \lambda\} = \sup\{x : \mathbb{P}(X < x) \leq \lambda\}.$$

Mit $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ ausgedrückt:

$$q_X^-(\lambda) = \inf\{x : F_X(x) \geq \lambda\},$$
$$q_X^+(\lambda) = \inf\{x : F_X(x) > \lambda\}.$$

Value at Risk

Sei
$L^0 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X$ ist eine Zufallsvariable mit $X(\omega) < \infty, \mathbb{P} - f.s.\}$.

Definition 5
Sei $\lambda \in (0,1)$. Für $X \in L^0$ definiere den *Value at Risk* zum Niveau λ als

$$VaR_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1-\lambda) = \inf\{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\}.$$

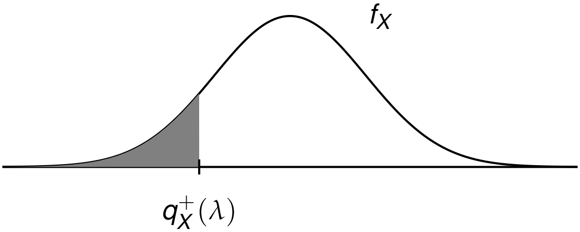
Value at Risk

Beachte, dass gilt:

$$
\begin{aligned}
-q_X^+(\lambda) &= -\sup\{x : \mathbb{P}(X < x) \leq \lambda\} = \inf\{-x : \mathbb{P}(X < x) \leq \lambda\} \\
&= \inf\{m : \mathbb{P}(X < -m) \leq \lambda\} = \inf\{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\}, \\
q_{-X}^-(1-\lambda) &= \inf\{m : \mathbb{P}(-X \leq m) \geq 1 - \lambda\} \\
&= \inf\{m : \mathbb{P}(-X - m \leq 0) - 1 \geq -\lambda\} \\
&= \inf\{m : 1 - \mathbb{P}(-X - m \leq 0) \leq \lambda\} \\
&= \inf\{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\}.
\end{aligned}
$$

Der Value at Risk ist verteilungsinvariant.

Darstellung von $VaR_\lambda(X)$ mithilfe der Dichte f_X von X: Die graue Fläche entspricht gerade λ



Value at Risk

Theorem 6

Der Value at Risk ist ein monetäres, positiv homogenes Risikomaß.

Beweis

a) Monotonie: Sei $X \leq Y$. Dann ist $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \geq \mathbb{P}(Y \leq x) = F_Y(x)$ und $q_X^+(\lambda) \leq q_Y^+(\lambda)$. Also

$$VaR_\lambda(Y) = -q_Y^+(\lambda) \leq -q_X^+(\lambda) = VaR_\lambda(X).$$

b) Translationsinvarianz: Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} VaR_\lambda(X+x) &= \inf\{m : \mathbb{P}(X+x+m<0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\tilde{m}-x : \mathbb{P}(X+x+\tilde{m}-x<0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\tilde{m}-x : \mathbb{P}(X+\tilde{m}<0) \leq \lambda\} = VaR_\lambda(X) - x. \end{aligned}$$

c) Positive Homogenität: Sei $\alpha > 0$.

$$\begin{aligned} VaR_\lambda(\alpha X) &= \inf\{m : \mathbb{P}(\alpha X+m<0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\alpha\tilde{m} : \mathbb{P}(\alpha X+\alpha\tilde{m}<0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{\alpha\tilde{m} : \mathbb{P}(X+\tilde{m}<0) \leq \lambda\} \\ &= \alpha \inf\{\tilde{m} : \mathbb{P}(X+\tilde{m}<0) \leq \lambda\} = \alpha VaR_\lambda(X). \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkungen

a) Im Finanzkontext ist $VaR_\lambda(X)$ die kleinste Kapitalmenge, die – sobald sie zu X hinzugefügt und in ein risikoloses Wertpapier investiert wird – die Wahrscheinlichkeit eines negativen Endvermögens unter dem Niveau λ hält.
b) Der Value at Risk kontrolliert nur die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes, nicht aber seine Größe.
c) $VaR_\lambda(X)$ ist in der Regel nicht konvex und damit kein kohärentes Risikomaß. Das heißt, $VaR_\lambda(X)$ bestraft manchmal Diversifikation!

Beispiel 1

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Bestimme $VaR_\lambda(X)$!
Also finde $m \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}(X + m < 0) = \lambda$.
Dazu schreiben wir $X = \mu + \sigma Z$ mit $Z \sim N(0, 1)$. Es gilt also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X + m < 0) = \lambda \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}\Big(Z < \frac{-\mu - m}{\sigma}\Big) = \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi\Big(\frac{-\mu - m}{\sigma}\Big) = \lambda \\
&\Leftrightarrow \quad m = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\lambda),
\end{aligned}$$

Also ist in diesem Fall $VaR_\lambda(X) = -\mu - \sigma\Phi^{-1}(\lambda) = -\mu + \sigma\Phi^{-1}(1 - \lambda)$.

Beispiel 2

Betrachte X_1, X_2 mit

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,99, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,01. \end{cases}$$

$$X_2 = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,99, \\ -10^{10} & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 0,01. \end{cases}$$

$$VaR_{0,01}(X_1) = \inf\{m : \mathbb{P}(m + X_1 < 0) \leq 0,01\} = -1 = VaR_{0,01}(X_2).$$

Beispiel 3

Seien X_1, X_2 unabhängig mit

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad p = 0,5, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 1-p = 0,5 \end{cases}$$

für $i \in \{1,2\}$. Dann ist

$$X := \frac{X_1 + X_2}{2} = \begin{cases} 1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad p^2 = 0,25, \\ 0 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad 2p(1-p) = 0,5, \\ -1 & \text{mit Wahrscheinlichkeit} \quad (1-p)^2 = 0,25. \end{cases}$$

Es ist $VaR_{0,5}(X_i) = -1$ für $i = 1,2$ und $VaR_{0,5}(X) = 0$. Insbesondere gilt

$$\frac{1}{2} VaR_{0,5}(X_1) + \frac{1}{2} VaR_{0,5}(X_2) = -1 < VaR_{0,5}\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = 0.$$

Value at Risk bei Normalverteilungen

Theorem 7
In der Klasse der Normalverteilungen ist der Value at Risk konvex, also auch kohärent, falls $\lambda \in (0, \frac{1}{2}]$.

Beweis

Ist $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, dann ist

$$VaR_\lambda(X) = -\mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\lambda).$$

Wir betrachten hier nur Zufallsvariablen, für die (X_1, X_2) bivariat normalverteilt ist. Dann gilt: Für $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ und $\gamma \in [0,1]$ ist $X := \gamma X_1 + (1-\gamma)X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ wobei $\mu = \gamma\mu_1 + (1-\gamma)\mu_2$, und es gilt, da die Korrelation $Cor(X_1, X_2) \leq 1$ ist,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \gamma^2\sigma_1^2 + (1-\gamma)^2\sigma_2^2 + 2\gamma(1-\gamma)\sigma_1\sigma_2 Cor(X_1, X_2) \\ &\leq \big(\gamma\sigma_1 + (1-\gamma)\sigma_2\big)^2. \end{aligned}$$

Also gilt für den Value at Risk:

$$VaR_\lambda(X) = -\mu + \sigma\Phi^{-1}(1-\lambda) \leq \gamma VaR_\lambda(X_1) + (1-\gamma) VaR_\lambda(X_2),$$

falls $\Phi^{-1}(1-\lambda) \geq 0$, also falls $0 < \lambda \leq 0,5$. $\square$

Average Value at Risk

Definition 8

Der *Average Value at Risk zum Niveau* $\lambda \in (0,1]$ einer Position $X \in L^1$ ist gegeben durch

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X)d\gamma.$$

Eigenschaften AVaR

Karlsruher Institut für Technologie

- Der Average Value at Risk ist verteilungsinvariant.
- $AVaR_\lambda(X) \geq VaR_\lambda(X)$.
- Es gilt

$$AVaR_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q_X^+(\gamma)d\gamma = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda F_X^{-1}(\gamma)d\gamma,$$

  wenn man beachtet, dass $q_X^+(\gamma)$ und $q_X^-(\gamma) = F_X^{-1}(\gamma)$ bis auf abzählbar viele γ übereinstimmen.
- Für $\lambda = 1$ gilt $AVaR_1(X) = \mathbb{E}[-X]$.

AVaR und SSD

Lemma 9
Seien $X, Y \in L^1$. Dann gilt

$$X \succeq_{SSD} Y \iff AVaR_\lambda(X) \le AVaR_\lambda(Y), \quad \lambda \in (0,1].$$

Beweis.
Wegen $AVaR_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda F_X^{-1}(\gamma)d\gamma$ folgt die Äquivalenz aus der Charakterisierung von SSD. □

Beispiel

Sei $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Bestimme $AVaR_\lambda(X)$!
Es gilt:

$$\begin{aligned} AVaR_\lambda(X) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X)d\gamma = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda(-\mu-\sigma\Phi^{-1}(\gamma))d\gamma \\ &= -\mu - \frac{\sigma}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi^{-1}(\gamma)d\gamma = -\mu - \frac{\sigma}{\lambda}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\lambda)} x\varphi(x)dx \\ &= -\mu + \frac{\sigma}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda)). \end{aligned}$$

Expected Shortfall

Definition 10
Der *Expected Shortfall zum Niveau* $\lambda \in (0,1)$ einer Position $X \in L^1$ ist

$$ES_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[X 1_{\{X<q\}}] + q(\lambda - \mathbb{P}(X<q))\Big),$$

wobei q ein λ-Quantil von X ist.

Ist die Verteilungsfunktion F_X stetig, so ist $\mathbb{P}(X<q) = \lambda$ und es gilt

$$ES_\lambda(X) = -\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[X 1_{\{X<q\}}] = -\mathbb{E}[X|X<q].$$

Conditional Value at Risk

Definition 11
Der *Conditional Value at Risk zum Niveau* $\lambda \in (0,1)$ einer Position $X \in L^1$ ist gegeben durch

$$CVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \inf_{s\in\mathbb{R}} \left\{ \mathbb{E}[(X-s)^-] - s\lambda \right\} = \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[(X-q)^-] - q,$$

wobei q ein λ-Quantil von X ist.

Bemerkungen

Das Minimum von $f(s) := \mathbb{E}[(X-s)^-] - s\lambda$ wird für alle λ-Quantile von X erreicht:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X-s)^-] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{-\infty} 1_{\{x\le y\le s\}} dy F_X(dx)\\ &= \int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{y} 1_{\{x\le y\le s\}} F_X(dx)dy = \int_{-\infty}^{s} F_X(y)dy.\end{aligned}$$

Also ist $f(s) = \int_{-\infty}^{s} F_X(x)dx - s\lambda$. Sei q ein beliebiges λ-Quantil von X. Dann gilt für $s \ge q$:

$$f(q) - f(s) = -\int_q^s F_X(x)dx - \lambda(q-s) \le (\lambda - F_X(q))(s-q) \le 0.$$

Und für $s \le q$ gilt:

$$f(q) - f(s) = \int_s^q F_X(x)dx - \lambda(q-s) \le (F_X(q-) - \lambda)(q-s) \le 0.$$

Also ist q eine Minimumstelle von f.

Theorem 12

Die Definitionen von Average Value at Risk, Expected Shortfall und Conditional Value at Risk stimmen überein.

Beweis

Karlsruher Institut für Technologie

Wir haben bereits gezeigt, dass

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda F_X^{-1}(\gamma)d\gamma = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(X-q)^-] - q$$

für ein λ-Quantil q von X gilt.

Damit folgt: $AVaR_\lambda(X) = CVaR_\lambda(X)$.

Beweis

Betrachten wir den Conditional Value at Risk, so gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(X-q)^-]-q &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)1_{\{X<q\}}]-q\\ &= \frac{1}{\lambda}\Big(q\mathbb{P}(X<q)-\mathbb{E}[X1_{\{X<q\}}]-\lambda q\Big)\\ &= -\frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[X1_{\{X<q\}}]+q(\lambda-\mathbb{P}(X<q))\Big).\end{aligned}$$

Also folgt die Äquivalenz zum Expected Shortfall. □

AVaR ist kohärent

Theorem 13
Für $\lambda \in (0, 1]$ ist $AVaR_\lambda$ ein kohärentes Risikomaß.

Beweis

- Für $\lambda = 1$ ist $AVaR_\lambda(X) = \mathbb{E}[-X]$.
- Sei jetzt $\lambda < 1$.
- Monotonie, Translationsinvarianz und positive Homogenität folgen sofort aus den entsprechenden Eigenschaften des Value at Risk.
- Bleibt z.z.: $AVaR_\lambda(X + Y) \leq AVaR_\lambda(X) + AVaR_\lambda(Y)$.

Beweis

Darstellung als Expected Shortfall:

$$\begin{aligned} AVaR_\lambda(X) &= -\frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[X1_{\{X<q\}}] + q(\lambda - \mathbb{P}(X<q))\Big) \\ &= -\frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[X1_{\{X<q\}}] + \delta_\lambda(X)\,\mathbb{E}[X1_{\{X=q\}}]\Big) \end{aligned}$$

mit

$$\delta_\lambda(X) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \mathbb{P}(X=q)=0, \\ \frac{\lambda - \mathbb{P}(X<q)}{\mathbb{P}(X=q)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da q ein λ-Quantil von X ist, gilt $\mathbb{P}(X \le q) \ge \lambda$ und $\mathbb{P}(X<q) \le \lambda$. Insbesondere ist $0 \le \delta_\lambda(X) \le 1$. Wenn $\mathbb{P}(X=q)=0$, gilt

$$\lambda \le \mathbb{P}(X \le q) = \mathbb{P}(X<q) \le \lambda$$

und daher $\lambda - \mathbb{P}(X<q) = 0$ bzw. $\delta_\lambda(X) = 0$.

Beweis

Damit erhalten wir

$$AVaR_\lambda(X) = \mathbb{E}[-X 1_{\{X<q\}}^{(\lambda)}],$$

wobei

$$1_{\{X<q\}}^{(\lambda)} := \frac{1}{\lambda}\left(1_{\{X<q\}} + \delta_\lambda(X) 1_{\{X=q\}}\right).$$

Seien q_X, q_Y, q_{X+Y} λ-Quantile von $X, Y, X+Y$. Es gilt:

a) $\mathbb{E}[1_{\{X<q_X\}}^{(\lambda)}] = 1$,

b) $1_{\{X+Y<q_{X+Y}\}}^{(\lambda)} - 1_{\{X<q_X\}}^{(\lambda)} \geq 0$ für $X > q_X$,

c) $1_{\{X+Y<q_{X+Y}\}}^{(\lambda)} - 1_{\{X<q_X\}}^{(\lambda)} \leq 0$ für $X < q_X$.

Beweis

Damit erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
& AVaR_\lambda(X) + AVaR_\lambda(Y) - AVaR_\lambda(X+Y) \\
= \; & \mathbb{E}[-X 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}}] + \mathbb{E}[-Y 1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}}] - \mathbb{E}[-(X+Y) 1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}}] \\
= \; & \mathbb{E}[X \cdot (1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}})] + \mathbb{E}[Y \cdot (1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}})] \\
\geq \; & q_X \, \mathbb{E}[1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{X<q_X\}}] + q_Y \, \mathbb{E}[1^{(\lambda)}_{\{X+Y<q_{X+Y}\}} - 1^{(\lambda)}_{\{Y<q_Y\}}] \\
= \; & q_X(1-1) + q_Y(1-1) = 0,
\end{aligned}
$$

und die Subadditivität ist gezeigt. $\square$

Weitere Darstellung von AVaR

Theorem 14

Für $\lambda \in (0,1]$ *hat der* $AVaR_\lambda(X)$ *die Form*

$$AVaR_\lambda(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathbb{Q}_\lambda} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X],$$

wobei

$$\mathbb{Q}_\lambda := \left\{\mathbb{Q} \text{ ist W-maß} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \le \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Das Maximum wird von $\tilde{\mathbb{Q}}$ *angenommen mit*

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = 1^{(\lambda)}_{\{X<q\}},$$

wobei $1^{(\lambda)}_{\{X<q\}}$ *wie vorher definiert ist und* q *ein* λ*-Quantil von* X *ist.*

Beweis

- Sei $\mathbb{Q} \in \mathbb{Q}_\lambda$ und $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} =: L$.
- Also ist $L \leq \frac{1}{\lambda}$.
- Die Aussage ist richtig für $\lambda = 1$, da $\mathbb{Q}_1 = \{\mathbb{P}\}$ ist.
- Sei nun $\lambda < 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned} AVaR_\lambda(X) - \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] &= \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X] - \frac{1}{\lambda}\Big(\mathbb{E}[X1_{\{X<q\}}] + q(\lambda - \mathbb{P}(X<q))\Big) \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\lambda LX - X1_{\{X<q\}} + q1_{\{X<q\}} - q\lambda L\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\left[(X-q)(\lambda L - 1_{\{X<q\}})\right]. \end{aligned}$$

- Es gilt jetzt aber, dass $(X-q)(\lambda L - 1_{\{X<q\}}) \geq 0$, da $0 \leq \lambda L \leq 1$.
- Also folgt $AVaR_\lambda(X) \geq \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X]$.
- Außerdem ist $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}_\lambda$ und $AVaR_\lambda(X) = \mathbb{E}[-X1^{(\lambda)}_{\{X<q\}}]$. $\square$

Portfoliooptimierung mit Risikomaßen

Zwei Portfolio-Probleme

$$(P): \quad \min \quad Var(R^\pi) \qquad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}[R^\pi] = m_p, \quad \pi \cdot e = 1,$$

Betrachte für ein Risikomaß ρ

$$(P_\rho): \quad \min \quad \rho(R^\pi) \qquad \text{s.t.} \quad \mathbb{E}[R^\pi] = m_p, \quad \pi \cdot e = 1.$$

Theorem 15

Die Renditen seien gemeinsam normalverteilt. Weiter sei ρ verteilungsinvariant, translationsinvariant und positiv homogen mit $\rho(Z) > 0$, für $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dann gilt: $\pi^\star$ optimal für $(P) \Leftrightarrow \pi^\star$ optimal für (P_ρ).

Beweis

Seien π_1 und π_2 zwei verschiedene zulässige Portfolios mit zugehöriger Portfoliorendite R^{π_1} und R^{π_2}. Wegen $(R_T^1, \dots, R_T^d) \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ gilt

$$R^{\pi_1} - \mathbb{E}\, R^{\pi_1} \sim \mathcal{N}(0, {\pi_1}^\top \Sigma \pi_1), \quad R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2} \sim \mathcal{N}(0, {\pi_2}^\top \Sigma \pi_2).$$

Also $\exists \alpha > 0$, sodass $R^{\pi_1} - \mathbb{E}\, R^{\pi_1} \overset{d}{=} \alpha(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2})$.
Außerdem: $\rho\big(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2}\big) > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\rho(R^{\pi_1}) \le \rho(R^{\pi_2}) \quad &\Leftrightarrow \quad \rho\big(R^{\pi_1} - \mathbb{E}\, R^{\pi_1}\big) \le \rho\big(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2}\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \rho\big(\alpha(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2})\big) \le \rho\big(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2}\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha\rho\big(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2}\big) \le \rho\big(R^{\pi_2} - \mathbb{E}\, R^{\pi_2}\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \alpha \le 1 \\
&\Leftrightarrow \quad Var(R^{\pi_1}) \le Var(R^{\pi_2}).
\end{aligned}$$

$\square$