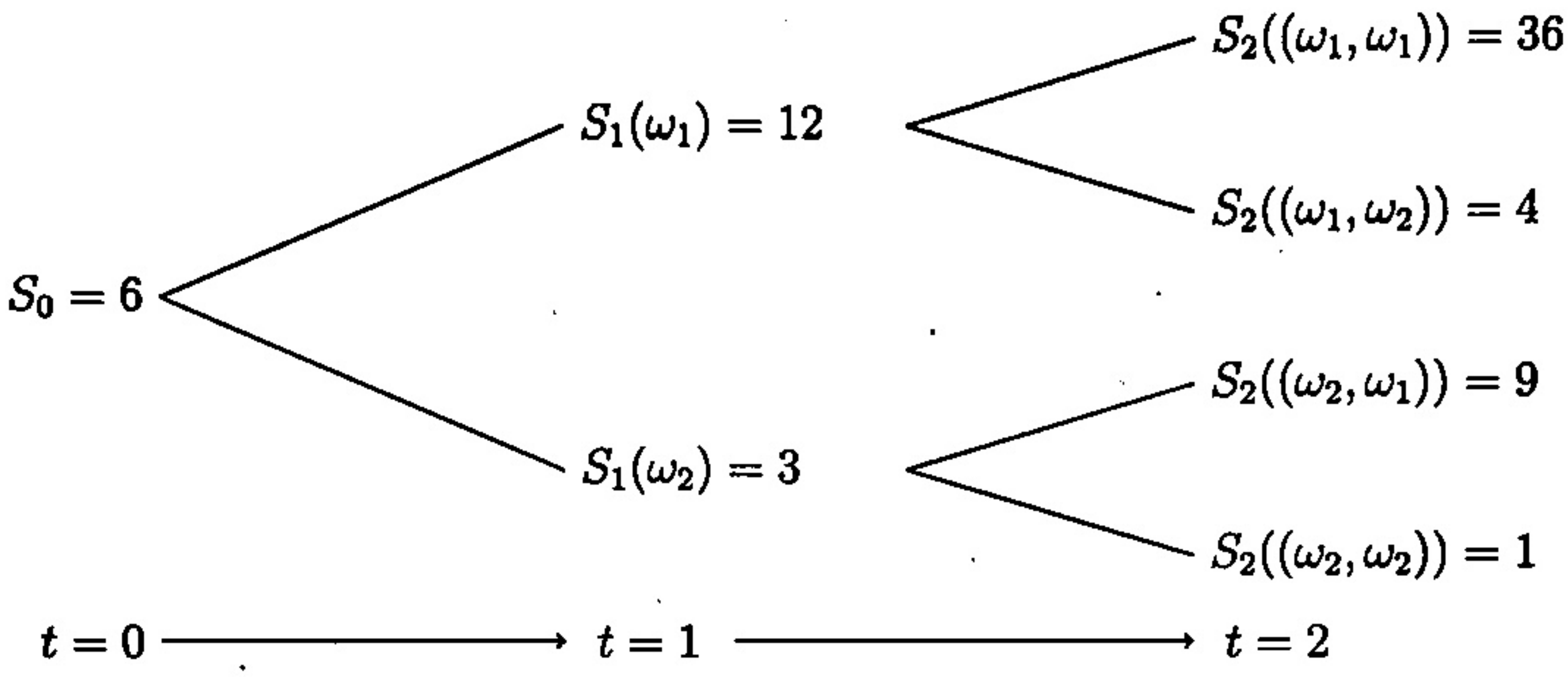
11.03.2016

Bäuerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit, WS15/16 Haupt

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit einer Aktie und einem Bond. Der Kursverlauf des Bonds sei gegeben durch $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{5}{4}$ und $B_2 = \frac{15}{8}$. Die möglichen Kursentwicklungen des Aktienkurses seien durch das folgende Baumdiagramm beschrieben:



a) Geben Sie die Menge Q^* aller äquivalenten Martingalmaße auf dem Grundraum $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\} \times \{\omega_1, \omega_2\}$ an!

b) Untersuchen Sie diesen Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und auf Vollständigkeit!

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Betrachten Sie erneut den Finanzmarkt aus Aufgabe 1. Auf diesem Finanzmarkt werde nun eine amerikanische Put-Option mit Ausübungspreis $K = 8$ gehandelt.

a) Bestimmen Sie den fairen Preis zur Zeit $t = 0$ für diese amerikanische Put-Option!

b) Geben Sie die optimale Ausübungsstrategie für diese amerikanische Put-Option an!

c) Bestimmen Sie die Anfangsinvestition (α_0, β_0) zur Zeit $t = 0$ für eine Hedging-Strategie ϕ zu dieser amerikanischen Put-Option!

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Gegeben sei ein 10-periodiges, arbitragefreies CRR-Modell mit den Paramtern $u = 1{,}1$ und $d = 0{,}9$. Der Anfangskurs der Aktie sei $S_0 = 100$ und der Startwert des Bonds sei $B_0 = 1$. Auf diesem Markt werde eine europäische Call-Option C mit Ausübungspreis $K = 220$ und Fälligkeit zur Zeit $T = 10$ mit dem fairen Preis von $\pi(C) = 0{,}195$ zur Zeit $t = 0$ gehandelt.

a) Wie hoch ist die Zinsrate r des Bonds? (Sie dürfen auf ganze Prozentzahlen runden)

b) Wie sieht die Anfangsinvestition (α_0, β_0) in Aktie und Bond einer Hedgingstrategie $(\phi_t = (\alpha_t, \beta_t))_{t=0,\dots,9}$ für die Call-Option C aus, wenn die Zinsrate des Bonds $r = 2\%$ beträgt?

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Gegeben sei ein T-periodiges CRR-Modell (Parameter d, u und r) mit einer Aktie und normiertem Bond, d.h. $B_0 = 1$. Das Modell sei arbitragefrei. Betrachten Sie für $\gamma > 0$ das Portfolio-Problem

$$(P) \begin{cases} \sup_\phi \ \mathbb{E}[-\exp(-\gamma V_T^\phi)] \\ V_0^\phi = v_0 \in \mathbb{R}_+ \end{cases}.$$

Lösen Sie dieses Portfolio-Problem mit Hilfe der dynamischen Programmierung. Zeigen Sie dabei, dass für die Wertfunktion J_t und für die optimale Anlagepolitik $(f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$ das Folgende gilt:

$$J_t(x) = d_t \exp(-\gamma(1+r)^{T-t}x) \text{ mit } d_t < 0 \text{ für alle } t = 0, \dots, T \text{ und alle } x \in \mathbb{R}$$

sowie

$$f_t^*(x) = a_t^* \text{ mit } a_t^* \in \mathbb{R} \text{ für alle } t = 0, \dots, T-1 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Dabei muss a_t^* nicht explizit bestimmt werden, jedoch muss begründet werden, weshalb f_t^* nicht von x abhängt.

Aufgabe 5 (6 Punkte)
Es sei μ_b eine Laplace-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Paramter $b > 0$, d.h. ihre Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F_{\mu_b}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{b}}, x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}\, e^{\frac{-x}{b}}, x \geq 0 \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Definition für stochastische Dominanz zweiter Ordnung für Verteilungen auf $\mathbb{R}$ an.

b) Zeigen Sie, dass für $b, b' > 0$ gilt: $\mu_b \succeq_{\text{uni}} \mu_{b'} \Leftrightarrow b \leq b'$.

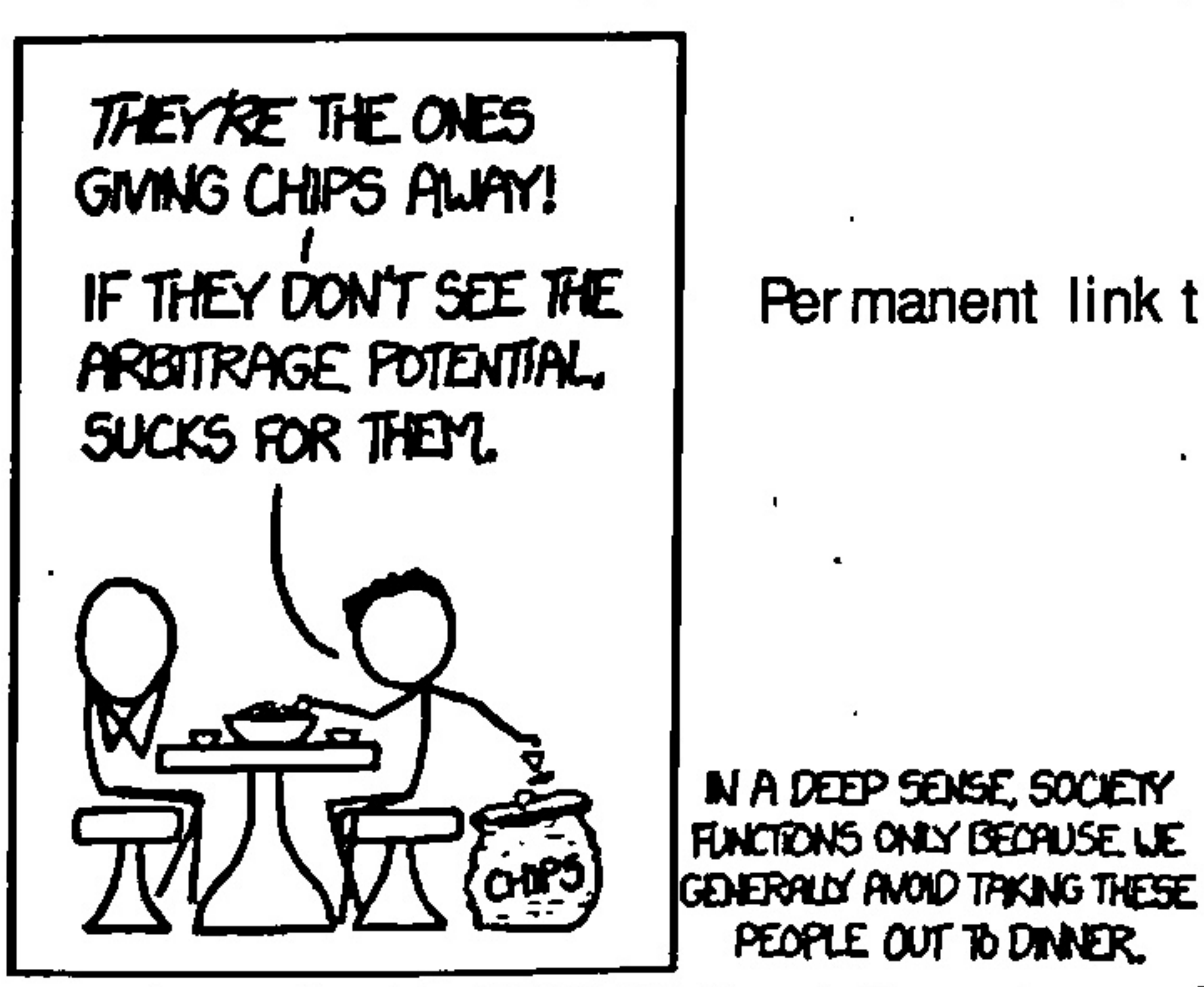
c) Gilt die Aussage aus Teil b) auch für $\succeq_{\text{mon}}$ anstelle $\succeq_{\text{uni}}$?

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{X} := \{X : \Omega \to \mathbb{R} \mid X \text{ ist } \mathcal{F}\text{-messbar und } \mathbb{E}[X^-]$ $\infty\}$. Wir definieren für $X \in \mathcal{X}$:

$$\rho(X) := \mathbb{E}[X^-].$$

Dabei bezeichnet X^- den Negativteil von X, also $X^-(\omega) := -\min\{0, X(\omega)\}$.

Untersuchen Sie ob ρ auf der Menge $\mathcal{X}$ die folgenden Eigenschaften besitzt: (i) Monotonie, (ii) Translationsinvarianz, (iii) Subadditivität, (iv) positive Homogenität, (v) Kohärenz.



Permanent link to this comic: http://xkcd.com/1499/