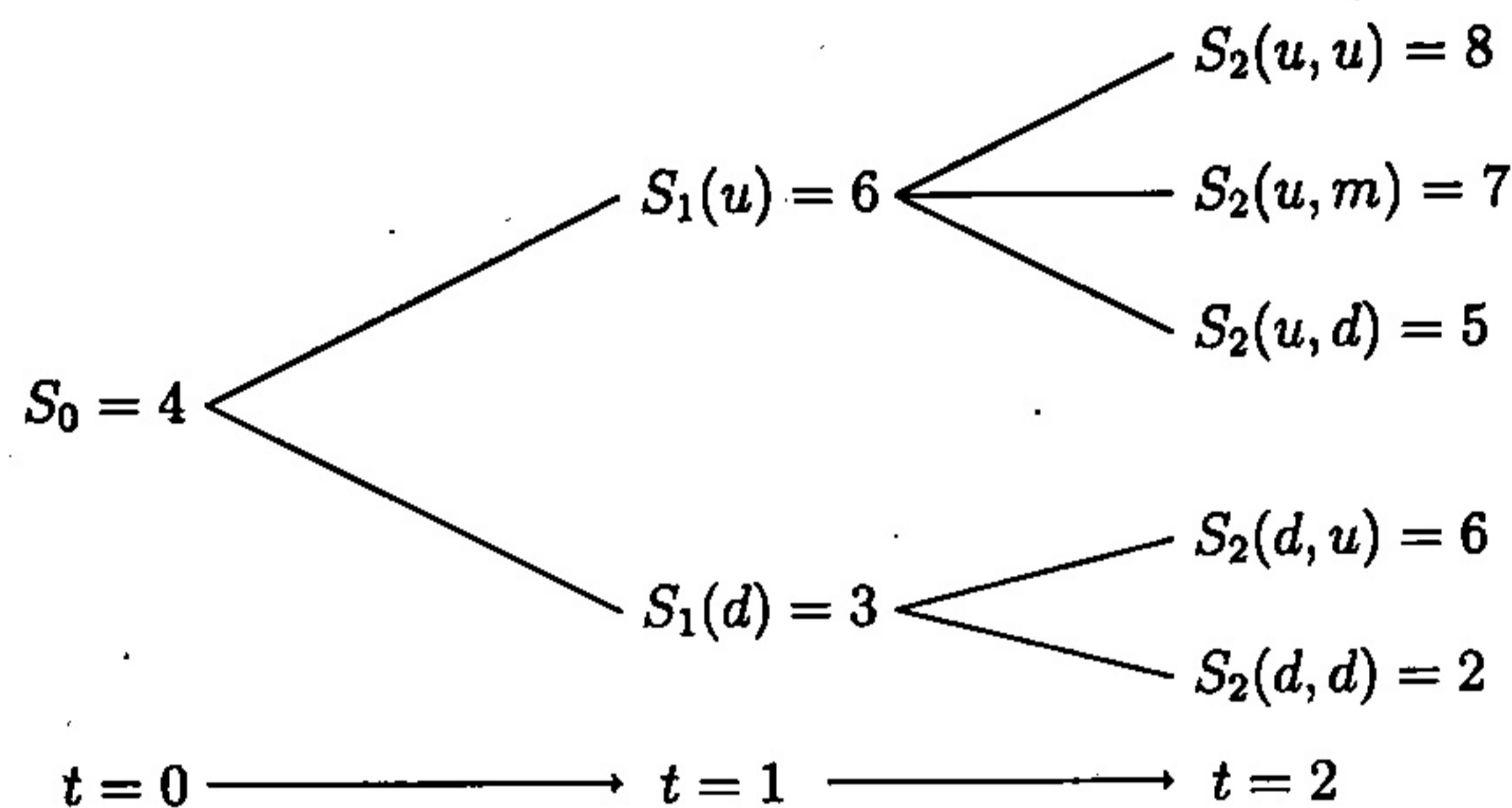


Finanzmathematik in diskreter Zeit, WS15/16 Nach

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit zwei Perioden, einer Aktie sowie einem Bond. Der Bond sei normiert und zinslos, d.h. $B_0 = B_1 = B_2 = 1$. Die Entwicklung des Aktienkurses sei wie in folgendem Baumdiagramm dargestellt.



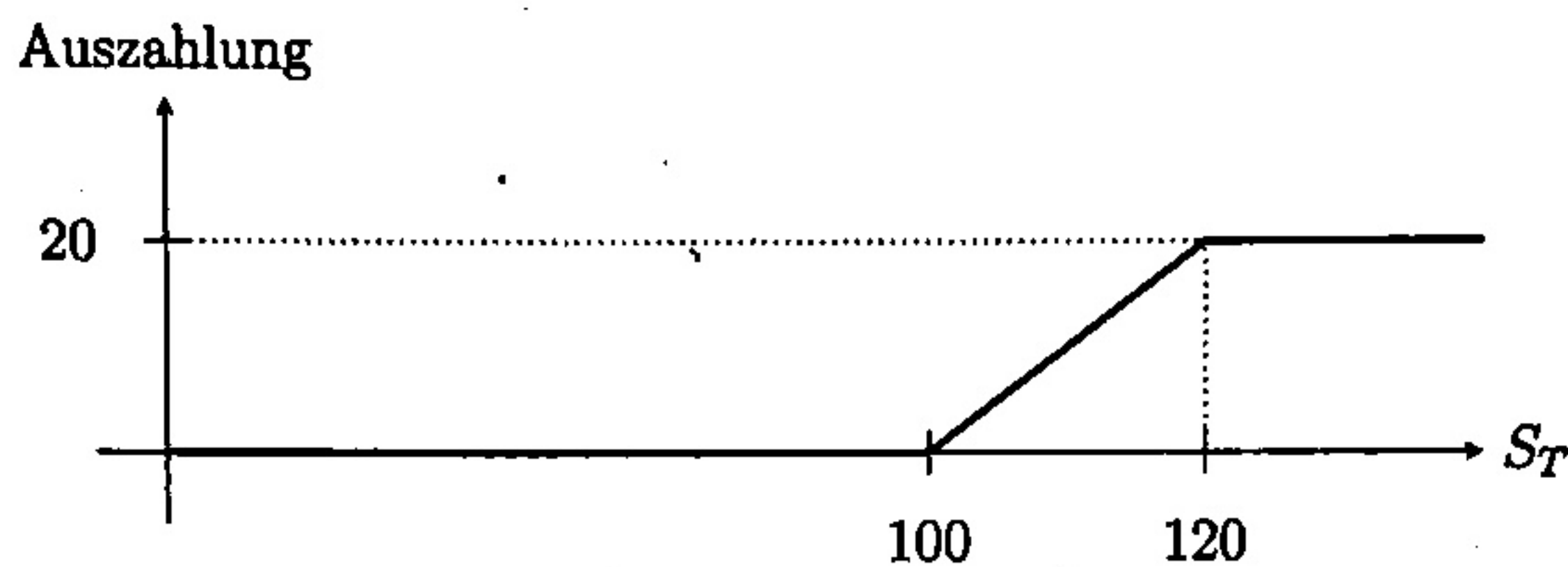
- Bestimmen Sie alle äquivalenten Martingalmaße $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*$ indem Sie für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega := \{u, d\} \times \{u, m, d\}$ den Wert $\mathbb{Q}(\{\omega\})$ angeben!
- Ist der gegebene Markt arbitragefrei? Ist er vollständig?
- Gegeben sei ein europäischer Put mit Strike $K = 5$ auf diesem Markt. Bestimmen Sie alle fairen Preise für diesen Put. Was schließen Sie aus dem Ergebnis?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sei ein diskreter arbitragefreier Finanzmarkt, auf dem eine Aktie S und ein Bond B gehandelt werden. Zusätzlich werden europäische Puts und Calls auf die Aktie gehandelt, die alle den selben Fälligkeitszeitpunkt T haben, aber unterschiedliche Strikes K . Die jeweiligen fairen Preise der Puts und Calls zum Zeitpunkt $t = 0$ können Sie folgender Tabelle entnehmen:

Strike K	80	90	100	110	120	140
Preis Call in $t = 0$	13,83	8,18	4,48	2,29	1,11	0,23
Preis Put in $t = 0$	3,04	7,29	13,49	21,20	29,92	48,84

- a) Es gelte $B_0 = 1$. Berechnen Sie den Wert B_T des Bonds zum Zeitpunkt T auf zwei Nachkommastellen genau!
- b) Ein Investor möchte zur Zeit T folgendes Auszahlungsprofil:

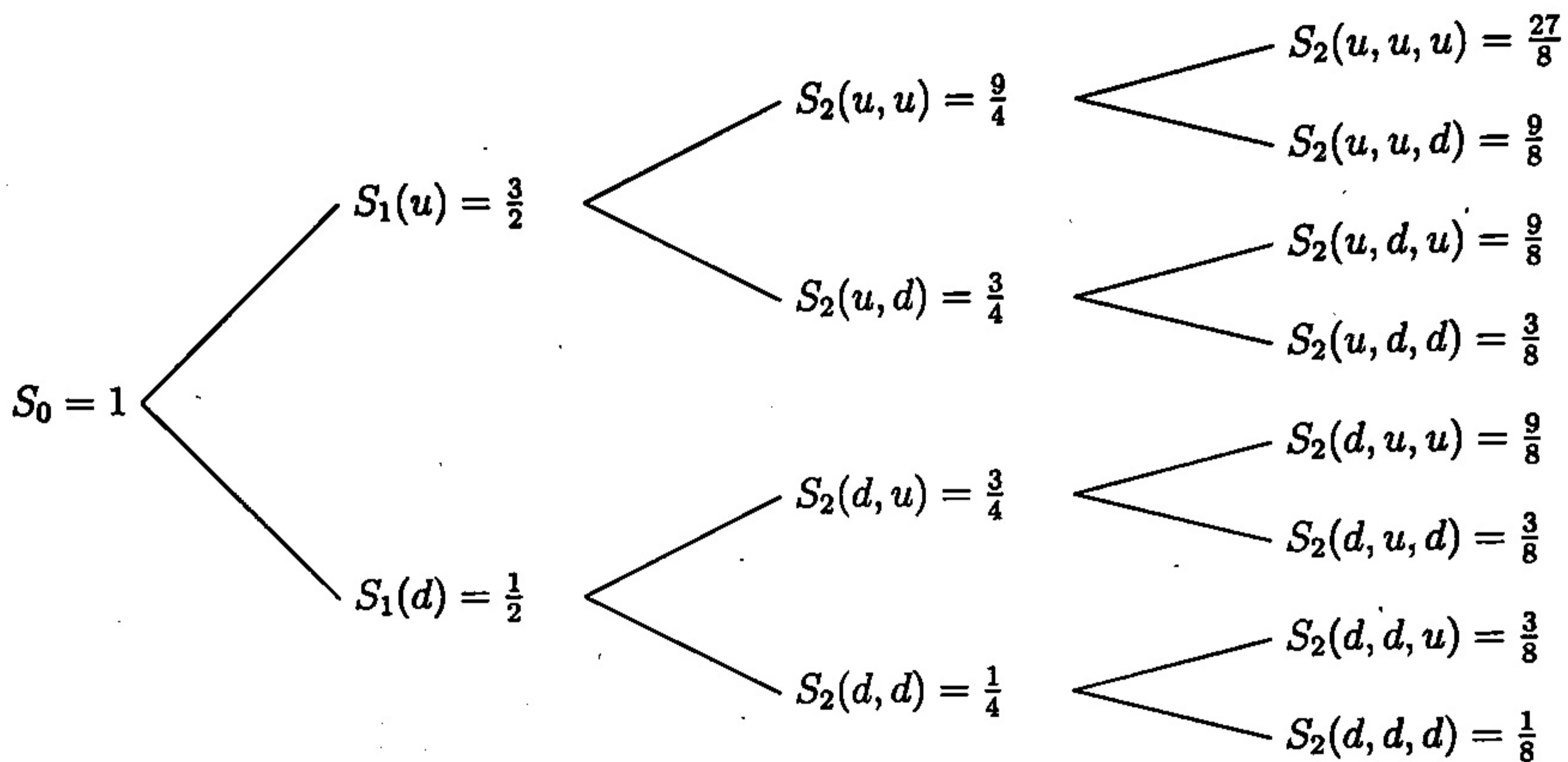


- (i) Geben Sie zwei mögliche Replikationen dieses Auszahlungsprofils durch die Calls und Puts aus obiger Tabelle und ggf. den Bond an.
- (ii) Geben Sie für dieses Auszahlungsprofil den Preis zur Zeit $t = 0$ an.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein dreiperiodiges CRR-Modell mit einer Aktie und einem Bond. Der Bond sei normiert, d.h. $B_0 = 1$ und der Zinssatz sei $r = 0,4$. Der Aktienkursverlauf sei durch das folgende Baumdiagramm gegeben. Betrachten Sie auf diesem Finanzmarkt einen amerikanischen Put mit Strike $K = 1$.

- Bestimmen Sie den fairen Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ für diesen amerikanischen Put.
- Beschreiben Sie die optimale Ausübungsstrategie für diesen amerikanischen Put, indem Sie in folgendem Baumdiagramm diejenigen Knoten markieren, an denen die optimale Ausübungsstrategie stoppen würde.
- Bestimmen Sie die Investition $\alpha_1(u)$ in die Aktie und $\beta_1(u)$ in den Bond (zur Zeit $t = 1$ im oberen Knoten u) für eine Hedging-Strategie (α_t, β_t) zu diesem amerikanischen Put.



Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei das Portfolioproblem

$$(P) \begin{cases} \min_{\phi} \mathbb{E}[(V_T^{\phi} - A)^2] \\ V_0^{\phi} = v_0 \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

im CRR-Modell mit Zinsrate r , wobei $A \in \mathbb{R}_+$ ein Benchmark mit $A > v_0 B_T$ sei.

Zeigen Sie, dass die optimale Anlagestrategie ϕ_t^* für $t = 0, \dots, T-1$ folgende Form hat (beachte: Analog zur Vorlesung beschreibt hier ϕ_t^* den Betrag, der zur Zeit t in die Aktie investiert wird):

$$\phi_t^*(x) = \left(\frac{A}{(1+r)^{T-t}} - x \right) \frac{\mathbb{E}[R_{t+1}]}{\mathbb{E}[R_{t+1}^2]},$$

wobei x das Vermögen zur Zeit t darstellt und R_t die Rendite in der Schreibweise der Vorlesung.

Hinweis:

Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wertfunktion J_t für alle $t = 0, \dots, T$ folgende Form hat:

$$J_t(x) = (x(1+r)^{T-t} - A)^2 d_t,$$

mit einer zeitabhängigen Konstanten $d_t > 0$.

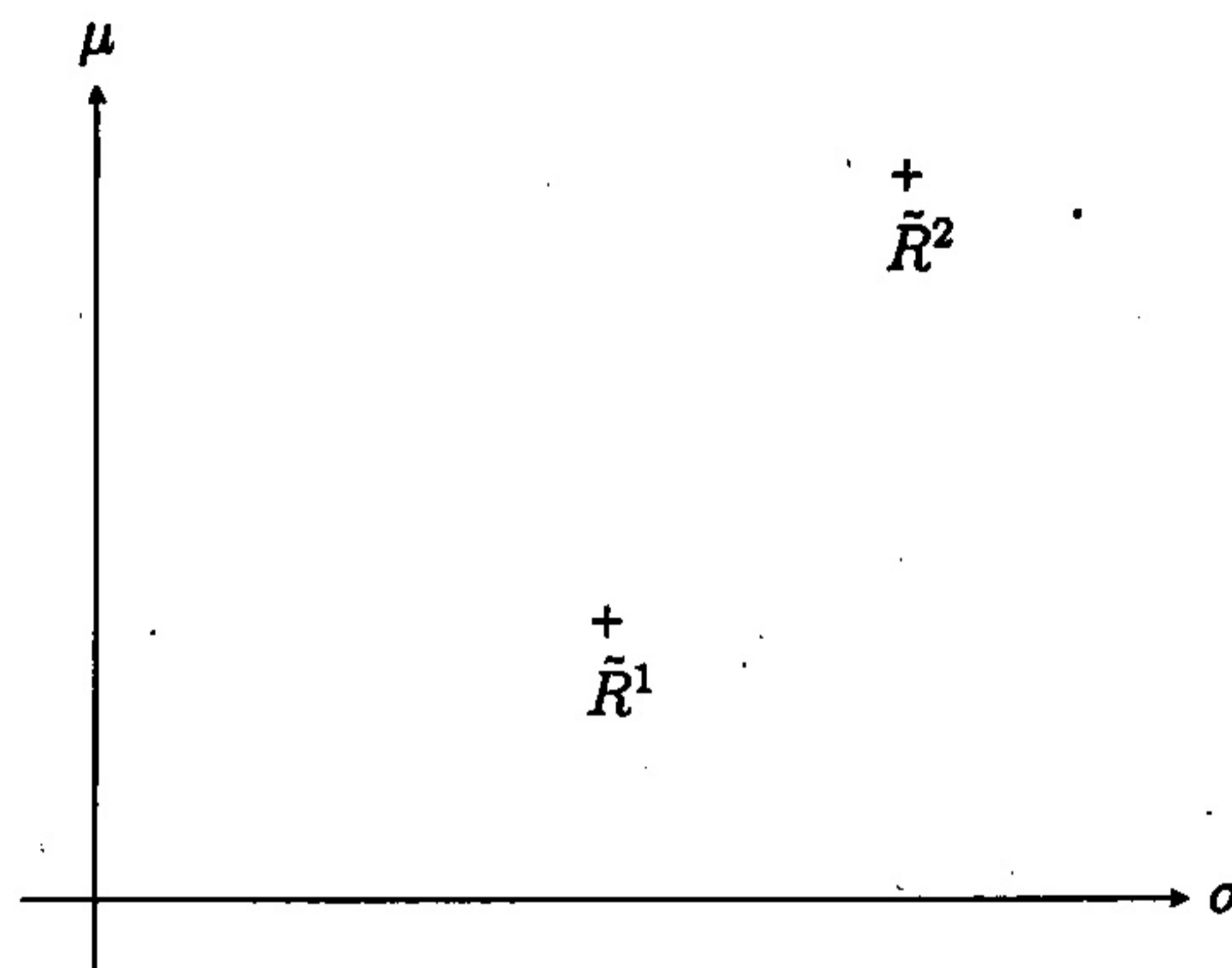
Aufgabe 5 (7 Punkte)

Betrachten Sie das Portfolio-Optimierungsproblem nach Markowitz mit zwei risikobehafteten Anlagemöglichkeiten. Diese beiden Anlagemöglichkeiten seien dabei maximal negativ korreliert, d.h. es gilt

$$\rho = \frac{\text{Cov}(\tilde{R}_1(T), \tilde{R}_2(T))}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{R}_1(T)) \text{Var}(\tilde{R}_2(T))}} = -1.$$

(Beachten Sie: Hier ist die Kovarianzmatrix Σ nicht positiv definit!)

- Wie sieht die Varianz des Gesamtportfolios $\text{Var}(\tilde{R}^\pi)$ aus?
- Skizzieren Sie in folgender Abbildung die Portfoliogrenze in dieser Situation und begründen Sie deren Verlauf mathematisch.



- Welchen erwarteten Return und welche Varianz hat das Minimum-Varianz-Portfolio (mvp)?

Aufgabe 6 (8 Punkte)

- Geben Sie die Definition des Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ an, d.h. die Definition von $V@R_\lambda(X)$ für eine Finanzposition X .
- Geben Sie durch Ankreuzen an, ob $V@R_\lambda$ die genannte Eigenschaft besitzt (ja) oder nicht (nein).

Eigenschaft	- ja -	-nein-
Monotonie		
Translationsinvarianz		
Subadditivität		
Positive Homogenität		
Kohärenz		

- Beweisen Sie für alle in Teil b) mit „ja“ markierten Eigenschaften, dass $V@R_\lambda$ diese Eigenschaft jeweils besitzt.