

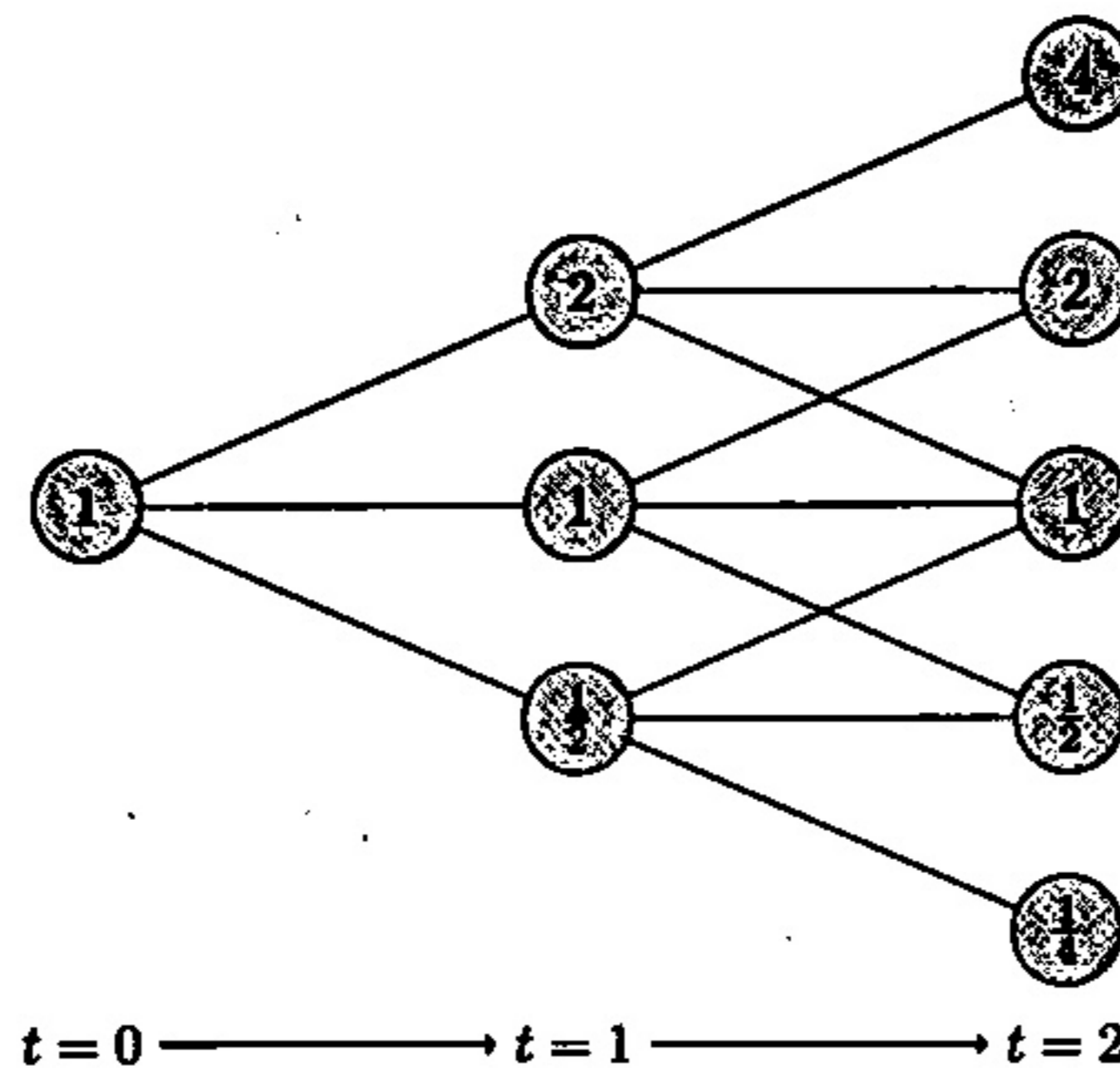
**Aufgabe 1 (4 Punkte)**

Gegeben sei ein Cox-Ross-Rubinstein Finanzmarkt mit  $T = 10$  Perioden.

- Wann ist der Finanzmarkt arbitragefrei?
- In diesem Finanzmarkt wird eine Digital-Call-Option mit Auszahlung  $H_1 = \mathbf{1}_{\{S_T > 15\}}$  zum Preis von  $\pi(H_1) = 0,341$  gehandelt und eine Digital-Put-Option mit Auszahlung  $H_2 = \mathbf{1}_{\{S_T \leq 15\}}$  zum Preis von  $\pi(H_2) = 0,564$ . Beide Preise sind arbitragefreie Preise zur Zeit  $t = 0$ . Welchen Zins  $r$  besitzt das risikolose Wertpapier?

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit einer Aktie  $S$  und einem risikolosen Wertpapier mit  $r = 0$ . Die Aktie entwickelt sich gemäß des folgenden Trinomialbaums:



Betrachten Sie eine Call-Option mit Auszahlung  $H = (S_2 - 1)^+$ .

- Geben Sie alle möglichen arbitragefreien Preise zur Zeit  $t = 0$  für  $H$  an.
- Angenommen die Call-Option wird zu einem Preis von  $\pi(H) = \frac{1}{4}$  gehandelt. Welchen Preis muss dann die Put-Option mit Auszahlung  $(1 - S_2)^+$  haben, damit keine Arbitrage entsteht?

**Aufgabe 3 (8 Punkte)**

Gegeben sei ein zweiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit  $u = 2$ ,  $d = \frac{1}{2}$ ,  $S_0 = 1$  und  $r = \frac{1}{2}$ . Wir betrachten eine amerikanische „Collar“-Option mit der Auszahlung

$$H_t = \min\{\max\{S_t, K_1\}, K_2\}, \quad t = 0, 1, 2,$$

wobei  $K_1 = 1$  und  $K_2 = 2$ .

- Bestimmen Sie den Preis dieser amerikanischen Option zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Geben Sie eine optimale Ausübungsstrategie an.
- Bestimmen Sie eine Hedging-Strategie der Option bis zur Ausübung.

#### Aufgabe 4 (9 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Trinomialmarkt mit  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  und  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$ . Auf diesem Markt gibt es ein risikoloses Wertpapier  $B$  mit  $B_0 = B_1 = 1$ . Außerdem existieren zwei risikobehaftete Wertpapiere  $S^1, S^2$  mit  $S_0^1 = S_0^2 = 1$  und

$$S_1^1(\omega_i) = \begin{cases} 2 & \text{für } i = 1, \\ 1 & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{2} & \text{für } i = 3, \end{cases} \quad S_1^2(\omega_i) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } i = 1, \\ \frac{1}{3} & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{3} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

- a) Zeigen Sie, dass der gegebene Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist.  
 b) Auf dem gegebenen Finanzmarkt betrachten wir nun einen Investor, der über das Anfangskapital  $x_0 > 0$  und die Nutzenfunktion

$$U(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

verfügt. Der Investor möchte den Nutzen, welchen er aus seinem Endvermögen zieht, maximieren.

Zeigen Sie mit Hilfe der Martingalmethode, dass das optimale Endvermögen  $X^*$  durch

$$X^*(\omega_i) = \begin{cases} \frac{x_0}{\kappa_0} \sqrt{2} & \text{für } i = 1, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} \sqrt{\frac{2}{3}} & \text{für } i = 2, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} & \text{für } i = 3, \end{cases} \quad \text{mit } \kappa_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}$$

gegeben ist.

#### Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien  $X, Y \in L^2$  zwei Zufallsvariablen mit Werten in  $(-\infty, 0)$ . Zeigen Sie:

$$X \succeq_{SSD} Y \text{ und } E[X] = E[Y] \Rightarrow \text{Var}(X) \leq \text{Var}(Y).$$

Beachte:  $X \succeq_{SSD} Y$  ist gleichbedeutend mit  $X \succeq_{uni} Y$ .

Lösungsvorschlag: Seien  $X, Y \in L^2$  zwei Zufallsvariablen mit Werten in  $(-\infty, 0)$  und  $X \succeq_{SSD} Y$ ,  $E[X] = E[Y]$ . Wir bezeichnen mit  $\mu_X$  die Verteilung von  $X$  und mit  $\mu_Y$  die Verteilung von  $Y$ . Laut Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} X \succeq_{SSD} Y &\iff \int f d\mu_X \geq \int f d\mu_Y \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f \\ &\iff E[f(X)] \geq E[f(Y)] \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f. \end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz folgt direkt aus der Definition des Erwartungswerts. Die Funktion  $f(x) = -x^2, x < 0$ , ist wachsend ( $f'(x) = -2x > 0$  für  $x < 0$ ) und konkav ( $f''(x) = -2 < 0$ ). Daher gilt

$$-E[X^2] \geq -E[Y^2] \iff E[X^2] \leq E[Y^2].$$

Somit erhalten wir

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \leq E[Y^2] - (E[X])^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \text{Var}(Y).$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da  $E[X] = E[Y]$  vorausgesetzt wurde.

#### Aufgabe 6 (8 Punkte)

- a) Definieren Sie Value at Risk and Average Value at Risk.  
 b) Zeigen Sie, dass für zwei Zufallsvariablen  $X, Y \in L^0$  gilt:

$$X \succeq_{FSD} Y \Rightarrow \text{VaR}_\lambda(X) \leq \text{VaR}_\lambda(Y) \quad \text{für fast alle } \lambda \in (0, 1).$$

Beachte:  $X \succeq_{FSD} Y$  ist gleichbedeutend mit  $X \succeq_{\text{mon}} Y$ .

- c) Zwei Zufallsvariablen  $X, Y \in L^0$  mit Verteilungsfunktionen  $F_X$  und  $F_Y$  heißen komonoton, falls

$$X = F_X^{-1}(U), \quad Y = F_Y^{-1}(U) \quad \text{mit demselben } U \sim U(0, 1).$$

Seien  $X$  und  $Y$  zwei komonotone Zufallsvariablen mit stetigen, strikt wachsenden Verteilungsfunktionen  $F_X$  und  $F_Y$ . Zeigen Sie, dass der Value at Risk komonoton additiv ist, d. h.

$$\text{VaR}_\lambda(X + Y) = \text{VaR}_\lambda(X) + \text{VaR}_\lambda(Y), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag:

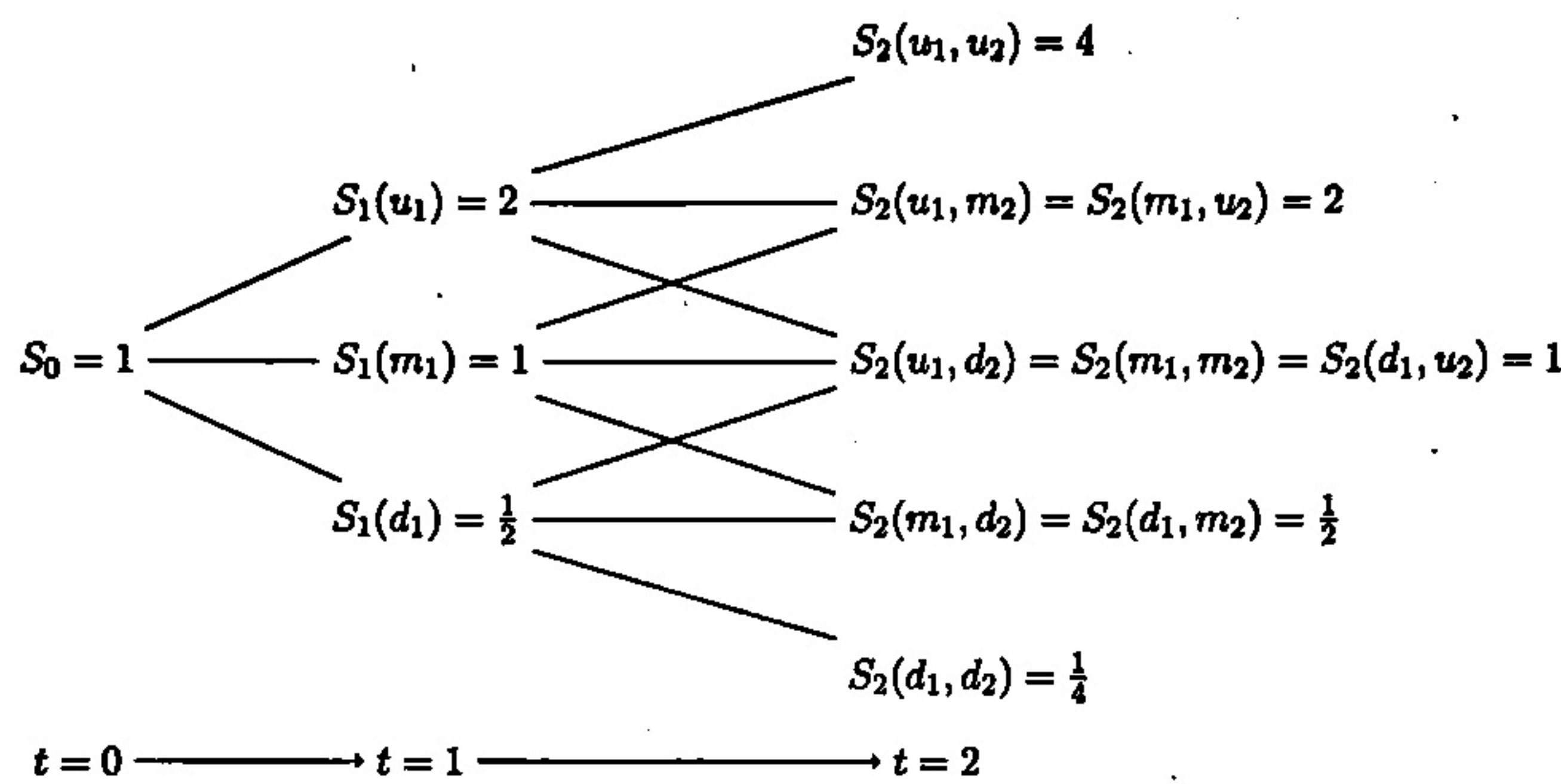
- a) Ein Cox-Ross-Rubinstein Finanzmarkt ist genau dann arbitragefrei, wenn  $d < 1 + r < u$  gilt.
- b) Offenbar gilt  $H_1 + H_2 = 1$  und somit

$$\begin{aligned} \pi(H_1) + \pi(H_2) &= \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_1}{B_T} \right] + \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_2}{B_T} \right] = \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_1 + H_2}{B_T} \right] = \frac{1}{B_T} \\ \Leftrightarrow 0,905 &= \frac{1}{(1+r)^{10}} \\ \Leftrightarrow r &= \sqrt[10]{\frac{1}{0,905}} - 1 = 0,01003202. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag:

- a) Gegeben ist ein Finanzmarkt mit  $T = 2$  Perioden, einem risikolosen Wertpapier mit  $B_0 = B_1 = B_2 = 1$  und einer Aktie  $S$ , die sich wie folgt entwickelt:



Hier ist offenbar  $\Omega = \{u_1, m_1, d_1\} \times \{u_2, m_2, d_2\}$  und  $\mathbb{Q}(\{y_1, y_2\}) = q_1(y_1)q_2(y_2|y_1)$  mit  $y_1 \in \{u_1, m_1, d_1\}$  und  $y_2 \in \{u_2, m_2, d_2\}$ . Die Auszahlung der Call-Option  $H = (S_2 - 1)^+$  ist

$$H((y_1, y_2)) = \begin{cases} 3, & \text{falls } (y_1, y_2) = (u_1, u_2), \\ 1, & \text{falls } (y_1, y_2) \in \{(u_1, m_2), (m_1, u_2)\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alle Preise von  $H$ , die im Intervall  $(\pi_-(H), \pi_+(H))$  liegen, ermöglichen keine Arbitrage, wobei

$$\pi_-(H) = \sup_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H}{B_T} \right] = \sup_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q [H] \quad \text{und} \quad \pi_+(H) = \inf_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q [H] = \inf_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H}{B_T} \right].$$

Wir bestimmen zunächst die Menge aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\mathcal{M}^* := \{Q \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : Q \text{ ist Martingalmaß, } Q \sim P\}.$$

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaße  $Q \in \mathcal{M}^*$  muss gelten

$$\mathbb{E}_Q[S_2 - S_1 | \mathcal{F}_1] = 0 \text{ Q-f.s. und } \mathbb{E}_Q[S_1 - S_0] = 0.$$

Wir berechnen zunächst die Übergangswahrscheinlichkeiten  $q_2(y_2|y_1)$ , d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass  $y_2$  zur Zeit  $t = 2$  realisiert wird, wenn bisher  $y_1$  realisiert wurde. Im oberen Knoten ergibt sich als Gleichungssystem

$$\begin{aligned} q_2(u_2|u_1)(4 - 2) + q_2(m_2|u_1)(2 - 2) + q_2(d_2|u_1)(1 - 2) &= 0 \iff 2q_2(u_2|u_1) = q_2(d_2|u_1) \\ q_2(u_2|u_1) + q_2(m_2|u_1) + q_2(d_2|u_1) &= 1. \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite Gleichung liefert

$$q_2(m_2|u_1) = 1 - 3q_2(u_2|u_1).$$

Wir erhalten als Lösung

$$(q_2(u_2|u_1), q_2(m_2|u_1), q_2(d_2|u_1)) = (q_2(u_2|u_1), 1 - 3q_2(u_2|u_1), 2q_2(u_2|u_1)),$$

wobei  $q_2(u_2|u_1) \in (0, \frac{1}{3})$  sein muss, damit  $q_2(\cdot|\cdot) \in (0, 1)$ . Für den mittleren Knoten haben wir das Gleichungssystem

$$q_2(u_2|m_1)(2-1) + q_2(m_2|m_1)(1-1) + q_2(d_2|m_1)(\frac{1}{2}-1) = 0 \iff 2q_2(u_2|m_1) = q_2(d_2|m_1),$$

$$q_2(u_2|u_1) + q_2(m_2|u_1) + q_2(d_2|u_1) = 1.$$

Analog zum oberen Knoten erhalten wir als Lösung

$$(q_2(u_2|m_1), q_2(m_2|m_1), q_2(d_2|m_1)) = (q_2(u_2|m_1), 1 - 3q_2(u_2|m_1), 2q_2(u_2|m_1)), \quad q_2(u_2|m_1) \in (0, \frac{1}{3}).$$

Beachte: Die Berechnung von  $q_2(\cdot|d_1)$  ist nicht notwendig, da die Auszahlung der Call-Option immer null ist, wenn zur Zeit  $t = 1$  das Szenario  $d_1$  eintritt, d. h.  $H((d_1, \cdot)) \equiv 0$ . Die Berechnung von  $q_2(\cdot|d_1)$  ist analog zum oberen bzw. mittleren Knoten und man erhält

$$(q_2(u_2|d_1), q_2(m_2|d_1), q_2(d_2|d_1)) = (q_2(u_2|d_1), 1 - 3q_2(u_2|d_1), 2q_2(u_2|d_1)), \quad q_2(u_2|d_1) \in (0, \frac{1}{3}).$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten  $q_1(v_1)$  ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$q_1(u_1)(2-1) + q_1(m_1)(1-1) + q_1(d_1)(\frac{1}{2}-1) = 0 \iff 2q_1(u_1) = q_1(d_1),$$

$$q_1(u_1) + q_1(m_1) + q_1(d_1) = 1,$$

dessen Lösung ist (analog zu oben)

$$(q_1(u_1), q_1(m_1), q_1(d_1)) = (q_1(u_1), 1 - 3q_1(u_1), 2q_1(u_1)), \quad q_1(u_1) \in (0, \frac{1}{3}).$$

Also gilt für das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$

$$Q(\{(u_1, u_2)\}) = q_1(u_1) q_2(u_2|u_1)$$

$$Q(\{(u_1, m_2)\}) = q_1(u_1) q_2(m_2|u_1) = q_1(u_1) (1 - 3q_2(u_2|u_1)),$$

$$Q(\{(m_1, u_2)\}) = q_1(m_1) q_2(u_2|m_1) = (1 - 3q_1(u_1)) q_2(u_2|m_1), \quad q_1(u_1), q_2(u_2|m_1) \in (0, \frac{1}{3}).$$

(Beachte: Die Berechnung von  $Q(\{\omega\})$  für  $\omega \in \Omega \setminus \{(u_1, u_2)\}, \{(u_1, m_2)\}, \{(m_1, u_2)\}$  ist nicht notwendig, da die Call-Option für diese  $\omega$  null ist. Es ist klar, dass  $Q(\{\omega\}) > 0$  für alle  $\omega \in \Omega$ , da die alle Übergangswahrscheinlichkeiten größer als null sind. Somit ist  $Q$  ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß, d. h.  $Q \in \mathcal{M}^*$ .) Wir erhalten

$$E_Q[H] = 3Q(\{(u_1, u_2)\}) + Q(\{(m_1, u_2)\}) + Q(\{(m_1, u_2)\})$$

$$= 3q_1(u_1) q_2(u_2|u_1) + q_1(u_1) (1 - 3q_2(u_2|u_1)) + (1 - 3q_1(u_1)) q_2(u_2|m_1)$$

$$= q_1(u_1) + q_2(u_2|m_1) - 3q_1(u_1) q_2(u_2|m_1)$$

mit  $q_1(u_1), q_2(u_2|m_1) \in (0, \frac{1}{3})$ . Durch scharfes Hinschauen erhalten wir

$$\inf_{Q \in \mathcal{M}^*} E_Q[H] = 0, \quad \sup_{Q \in \mathcal{M}^*} E_Q[H] = \frac{1}{3}.$$

Dies lässt sich auch formal nachrechnen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) := x + y - 3xy.$$

Zunächst stellen wir fest, dass  $f(q_1(u_1), q_2(u_2|m_1)) = E_Q[H] \geq 0$ , da  $H \geq 0$ . Aus  $f(0, 0) = 0$  folgt

$$\inf_{Q \in \mathcal{M}^*} E_Q[H] = \inf_{q_1(u_1), q_2(u_2|m_1) \in (0, \frac{1}{3})} f(q_1(u_1), q_2(u_2|m_1)) = 0.$$

Weiterhin suchen wir nach lokalen Maxima von  $f$ . Die notwendige Bedingung für ein lokales Extremum liefert

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 1 - 3y = 0 \iff y = \frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 1 - 3x = 0 \iff x = \frac{1}{3}.$$

Für eine hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum ist die Hesse-Matrix von  $f$  zu bestimmen:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Hesse-Matrix  $H_f$  ist indefinit. Somit wird das Supremum  $\sup_{x, y \in (0, \frac{1}{3})} f(x, y)$  auf dem Rand von  $(0, \frac{1}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$  angenommen. Da

$$f(x, 0) = x, \quad f(0, y) = y, \quad f(x, \frac{1}{3}) = f(\frac{1}{3}, y) = \frac{1}{3}$$

folgt  $\sup_{x,y \in (0, \frac{1}{3})} f(x,y) = \frac{1}{3}$ . Daher gilt

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q[H] = \sup_{q_1(u_1), q_2(u_2 | m_1) \in (0, \frac{1}{3})} f(q_1(u_1), q_2(u_2 | m_1)) = \frac{1}{3}.$$

Also liegen alle arbitragefreien Preis der Call-Option im Intervall

$$\pi(H) = (0, \frac{1}{3}).$$

b) Nach a) ist der Preis  $\pi(H) = \frac{1}{3}$  ein arbitragefreier Preis. Es gilt somit die Put-Call Parität:

$$C + \frac{K}{B_T} = P + S_0,$$

wobei  $C$  der Preis einer Call-Option und  $P$  der Preis einer Put-Option zur Zeit null sind. Beide Optionen haben den Basispreis  $K$ . Umstellen nach  $P$  und Einsetzen der gegebenen Werte liefert

$$P = C + \frac{K}{B_T} - S_0 = \frac{1}{4} + 1 - 1 = \frac{1}{4},$$

d. h. der Preis der Put-Option muss  $\frac{1}{4}$  sein, damit keine Arbitrage entsteht.

### Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: Es sei  $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\}$ .

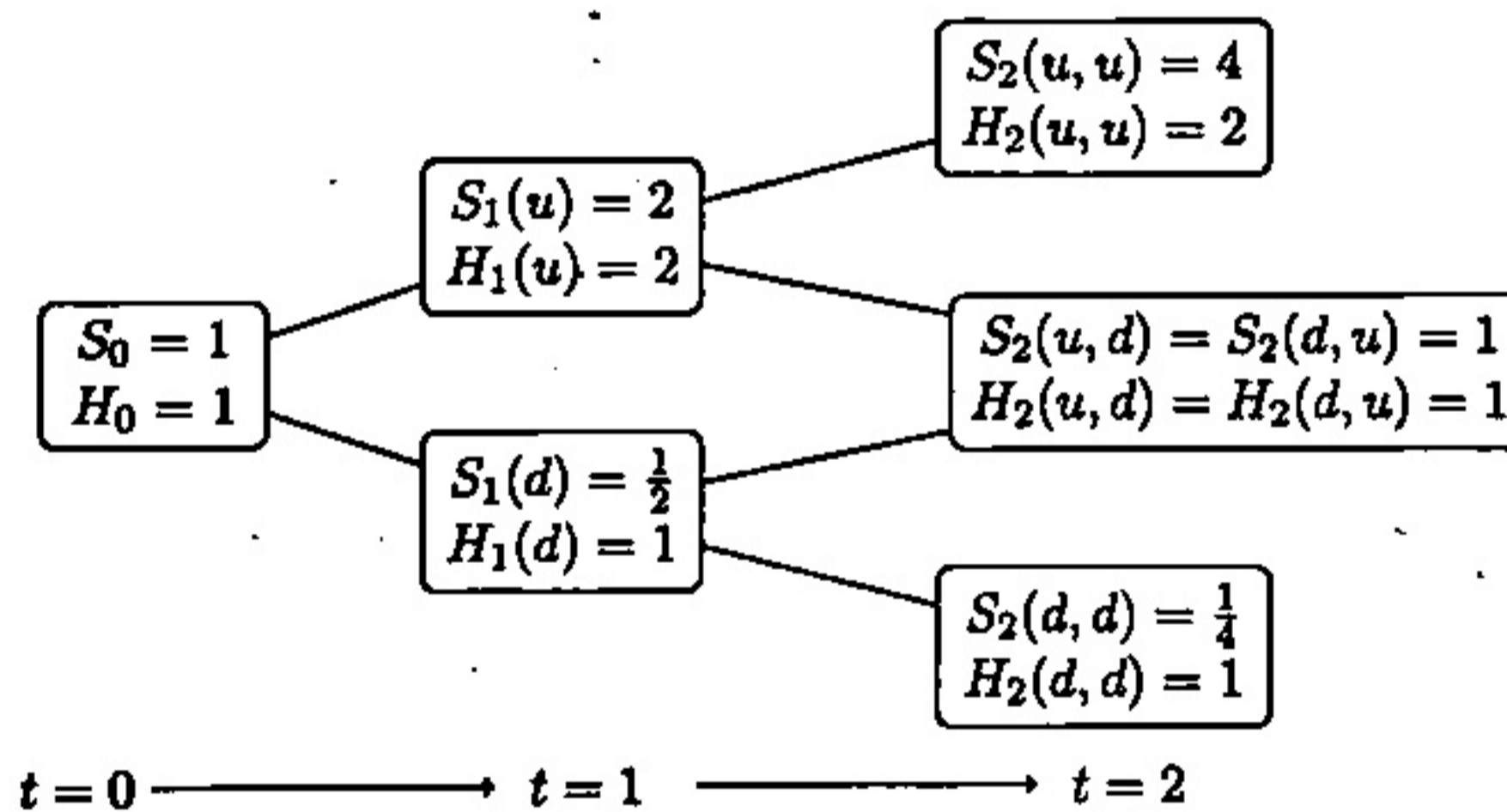
a) Das gegebene CRR-Modell ist arbitragefrei und vollständig, da  $d < 1+r < u$ . Das äquivalente Martingalmaß  $Q$  durch den Parameter

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$$

eindeutig festgelegt. Die risikolose Anlage  $B$  folgt dem deterministischen Verlauf

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{3}{2}, \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

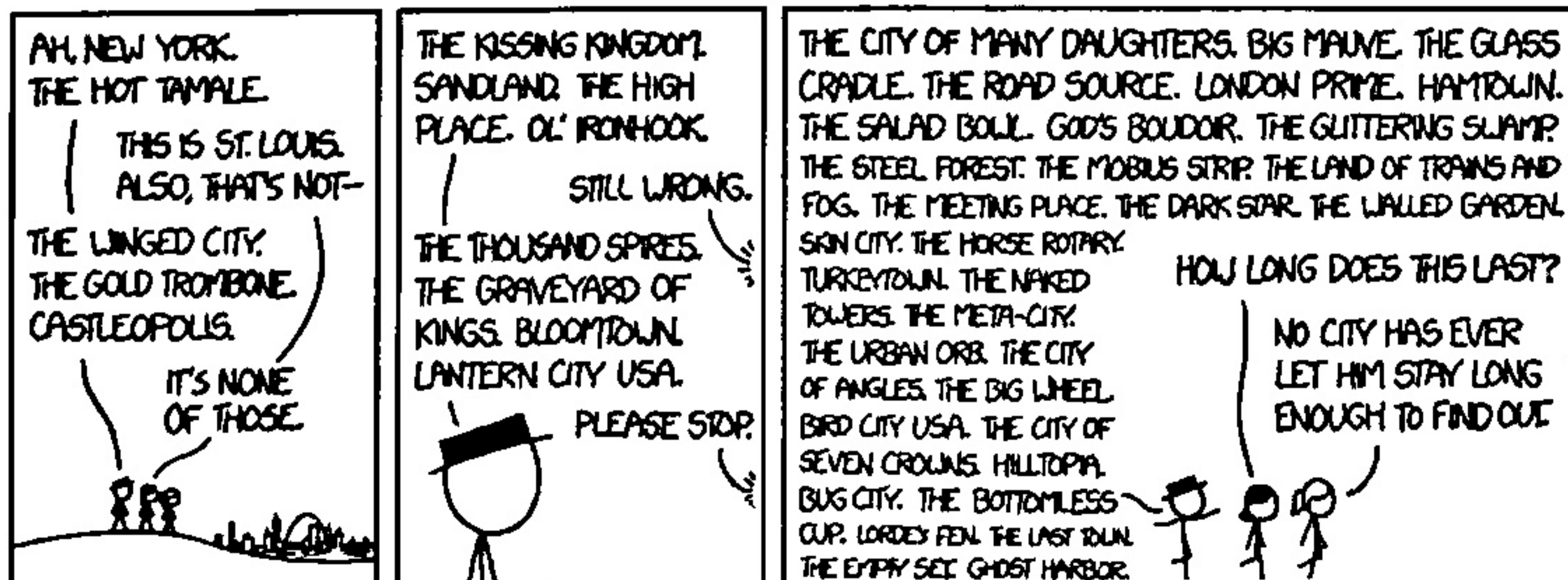
Die möglichen Entwicklungen des risikobehafteten Wertpapiers  $S$  und der amerikanischen Option sind wie im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Bestimme die Snell-Einhüllende  $Z = (Z_t)_{t=0,1,2,3}$  von  $(H_t B_t^{-1})_{t=0,1,2,3}$ , d.h.

$$Z_2 := \frac{H_2}{B_2}$$

$$Z_t := \max \left\{ \frac{H_t}{B_t}, \mathbb{E}_Q[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] \right\}, \quad t = 0, 1.$$



Also

$$\begin{aligned} Z_2(u, u) &= \frac{8}{9}, & Z_2(u, d) = Z_2(d, u) &= \frac{4}{9}, & Z_2(d, d) &= \frac{4}{9}, \\ Z_1(u) &= \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right\} = \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{20}{27} \right\} = \frac{4}{3}, \\ Z_1(d) &= \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right\} = \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{4}{9} \right\} = \frac{2}{3}, \\ Z_0 &= \max \left\{ 1, \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right\} = \max \left\{ 1, \frac{10}{9} \right\} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Nach der Vorlesung ist  $\pi_0^A(H) = Z_0 = \frac{10}{9}$  der faire Preis der Option zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Für den optimalen Ausübungszeitpunkt  $\tau^*$  gilt

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : Z_t = H_t B_t^{-1}\},$$

d.h.

$$\tau^*(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

**Alternativer Lösungsweg 1:** Der Preis der amerikanischen Option zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist gegeben durch

$$\pi_0^A(H) = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_\tau}{B_\tau} \right]$$

und für den optimalen Ausübungszeitpunkt  $\tau^*$  gilt

$$\tau^* = \arg \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_\tau}{B_\tau} \right].$$

Wir haben

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[H_0] &= 1, \\ \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_1}{B_1} \right] &= \frac{2}{3} (2q + (1-p)) = \frac{2}{3} \left( 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{10}{9}, \\ \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_2}{B_2} \right] &= \frac{4}{9} (2q^2 + q(1-p) + (1-q)q + (1-q)^2) = \frac{4}{9} \left( 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{13}{9} = \frac{52}{81}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\sup_{\tau \leq 2} \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_\tau}{B_\tau} \right] = \mathbb{E}_Q \left[ \frac{H_1}{B_1} \right] = \frac{10}{9}.$$

Also ist der Preis der amerikanischen Option zur Zeit  $t = 0$

$$\pi_0^A(H) = \frac{10}{9}$$

und der optimale Ausübungszeitpunkt ist  $\tau^* = 1$ , d.h. es ist optimal die Option zur Zeit  $\tau^* = 1$  auszuüben.

**Alternativer Lösungsweg 2:** Der Preis kann auch mit dem Preis-Algorithmus aus der Vorlesung bestimmt werden. Es gilt

$$H_t = h(S_t) \quad \text{mit} \quad h(s) = \min\{\max\{s, 1\}, 2\} \quad \text{für } t = 0, 1, 2,$$

d.h.

$$\begin{aligned} H_0 &= h(S_0) = h(1) = 1, \\ H_1(u) &= h(S_1(u)) = h(2) = 2, \\ H_1(d) &= h(S_1(d)) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \\ H_2(u, u) &= h(S_2(u, u)) = h(2) = 2, \\ H_2(u, d) &= h(S_2(u, d)) = h(1) = 1, \\ H_2(d, u) &= h(S_2(d, u)) = h(1) = 1, \\ H_2(d, d) &= h(S_2(d, d)) = h\left(\frac{1}{4}\right) = 1. \end{aligned}$$

Der Preis einer amerikanischen Option  $\pi_0^A(H)$  im CRR-Modell berechnet sich nach folgendem Algorithmus:

$$\begin{aligned} p_T(S_T) &= h(S_T) \\ &\vdots \\ p_t(S_t) &= \max \left\{ h(S_t), \frac{1}{1+r} (q p_{t+1}(S_t u) + (1-q) p_{t+1}(S_t d)) \right\} \\ &\vdots \\ p_0(S_0) &= \max \left\{ h(S_0), \frac{1}{1+r} (q p_1(S_0 u) + (1-q) p_1(S_0 d)) \right\} = \pi_0^A(H). \end{aligned}$$

Für das gegebene Modell erhalten wir

$$\begin{aligned} p_2(S_2(u, u)) &= p_2(4) = h(4) = 2, \\ p_2(S_2(u, d)) &= p_2(S_2(d, u)) = p_2(1) = h(1) = 1, \\ p_2(S_2(d, d)) &= p_2(\frac{1}{4}) = h(\frac{1}{4}) = 1, \\ p_1(S_1(u)) &= p_1(2) = \max \{ h(2), \frac{2}{3} (\frac{2}{3} p_2(4) + \frac{1}{3} p_2(1)) \} = \max \{ 2, \frac{2}{3} (\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1) \} = 2, \\ p_1(S_1(d)) &= p_1(\frac{1}{2}) = \max \{ h(\frac{1}{2}), \frac{2}{3} (\frac{2}{3} p_2(1) + \frac{1}{3} p_2(\frac{1}{4})) \} = \max \{ 1, \frac{2}{3} (\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1) \} = 1, \\ p_0(S_0) &= p_0(1) = \max \{ h(1), \frac{2}{3} (\frac{2}{3} p_2(2) + \frac{1}{3} p_2(\frac{1}{2})) \} = \max \{ 1, \frac{2}{3} (\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1) \} = \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

Der optimale Ausübungszeitpunkt ist  $\tau^* = \inf \{ t \geq 0 : p_t(S_t) = H_t \} = 1$ .

- b) Nach der Vorlesung existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie  $\varphi$ , so dass  $V_t^\varphi = B_t Z_t$  für  $t \leq \tau^*$  (Beachte:  $B_t Z_t \geq H_t$  für alle  $t$ , da für die Snell-Einhüllende  $(Z_t)$  von  $(H_t B_t^{-1})$  gilt  $Z_t \geq H_t B_t^{-1}$  für alle  $t$  und  $B_{\tau^*} Z_{\tau^*} = H_{\tau^*}$ ). Da  $\tau^* = 1$ , suchen wir  $(\alpha_0, \beta_0)$ , so dass folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 \stackrel{st}{=} V_1^\varphi = B_1 Z_1,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= B_1 Z_1(u) \iff 2\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2, \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= B_1 Z_1(d) \iff \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten liefert

$$\frac{3}{2}\alpha_0 = 1 \iff \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\beta_0 = 1 \iff \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{2}{3} \iff \beta_0 = \frac{4}{9}.$$

Also ist die optimale Hedging-Strategie bis zur Ausübung

$$\varphi = (\alpha_0, \beta_0) = \left( \frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right).$$

## Aufgabe 4

### Lösungsvorschlag:

- a) Um den Markt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit zu prüfen, bestimmen wir die Menge aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\mathcal{M}^* := \{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\Omega, \mathcal{F}) : \mathbb{Q} \text{ ist Martingalmaß, } \mathbb{Q} \sim \mathbb{P} \}.$$

Falls  $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ , dann ist der Markt arbitragefrei (erster Hauptsatz der Preistheorie). Gilt sogar  $|\mathcal{M}^*| = 1$ , dann ist der Markt vollständig (zweiter Hauptsatz der Preistheorie). Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*$  muss gelten

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_1^k | \mathcal{F}_0] = \tilde{S}_0^k \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}, \quad k = 1, 2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^k] = S_0^k, \quad k = 1, 2,$$

da hier  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  und  $B_0 = B_1 = 1$ . Wir setzen  $q_i := \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$  für  $i = 1, 2, 3$ . Durch Einsetzen der gegebenen Werte von  $S_1^1$  und  $S_1^2$  und der Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mathbb{Q}$ , ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} & \frac{8}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Umstellen der ersten Gleichung nach  $q_3$  liefert

$$q_3 = 1 - q_1 - q_2.$$

Durch Einsetzen von  $q_3$  in die zweite Gleichung von (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2q_1 + q_2 + \frac{1}{2}(1 - q_1 - q_2) &= 1 \\ \iff \frac{3}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 &= \frac{1}{2} \\ \iff q_1 + \frac{1}{3}q_2 &= \frac{1}{3} \\ \iff q_1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}q_2. \end{aligned}$$

Setzen wir  $q_1$  und  $q_3$  in die dritte Gleichung von (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} q_2 \right) + \frac{8}{9} q_2 + \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} q_2 - q_2 \right) &= 1 \\ \iff \frac{8}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} q_2 &= 1 \\ \iff 10 - 2q_2 &= 9 \\ \iff q_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$q_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad q_3 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Also

$$Q(\{\omega_i\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } i = 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{3} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

Das lineare Gleichungssystem (1) ist somit eindeutig lösbar, d. h. es existiert genau ein Martingalmaß. Das berechnete Martingalmaß  $Q$  ist zudem äquivalent zu  $P$ , da  $Q(\{\omega_i\}) > 0$  für  $i = 1, 2, 3$ . Somit gilt  $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ , insbesondere  $|\mathcal{M}^*| = 1$ . Nach dem ersten und zweiten Hauptsatz der Preistheorie ist damit der gegebene Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig.

b) Wir betrachten die Nutzenfunktion  $U(x) = 1 - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ . Es gilt

$$U'(x) = \frac{1}{x^2}$$

und daher (Beachte:  $\text{Bild}(U') = (0, \infty)$ .)

$$(U')^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

Wir setzen

$$Z(\omega_i) := \frac{1}{B_1} \frac{Q(\{\omega_i\})}{P(\{\omega_i\})} = \begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} & \text{für } i = 1, \\ 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} & \text{für } i = 2, \\ 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

Laut Vorlesung ist das optimale Endvermögen gerade  $X^* = (U')^{-1}(y^* Z)$ , wobei  $y^*$  der Lagrange-Multiplikator ist, der die Bedingung  $E_Q \left[ \frac{X^*}{B_1} \right] = x_0$  erfüllt. Zunächst ist

$$X^* = (U')^{-1}(y^* Z) = \frac{1}{\sqrt{y^* Z}}$$

Wir bestimmen den Lagrange-Multiplikator  $y^*$  aus der Nebenbedingung

$$x_0 = E_Q \left[ \frac{X^*}{B_1} \right] = E[X^* Z] = E \left[ \frac{1}{\sqrt{y^* Z}} Z \right] = \frac{1}{\sqrt{y^*}} E[\sqrt{Z}],$$

wobei

$$E[\sqrt{Z}] = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3} =: \kappa_0.$$

Also folgt

$$\frac{1}{\sqrt{y^*}} = \frac{x_0}{\kappa_0}$$

Daher ist das optimale Endvermögen

$$X^* = \frac{1}{\sqrt{y^* Z}} = \frac{x_0}{\kappa_0} \frac{1}{\sqrt{Z}}$$

Dabei ist zu beachten, dass  $X^*$   $\mathcal{F}_1$ -messbar ( $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$ ) ist, da  $Z$   $\mathcal{F}$ -messbar ist. Somit ist das optimale Endvermögen  $X^*$  in der Tat wie behauptet

$$X^*(\omega_i) = \begin{cases} \frac{x_0}{\kappa_0} \sqrt{2} & \text{für } i = 1, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} \sqrt{\frac{2}{3}} & \text{für } i = 2, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

## Aufgabe 5

**Lösungsvorschlag:** Seien  $X, Y \in L^2$  zwei Zufallsvariablen mit Werten in  $(-\infty, 0)$  und  $X \succeq_{SSD} Y$ ,  $E[X] = E[Y]$ . Wir bezeichnen mit  $\mu_X$  die Verteilung von  $X$  und mit  $\mu_Y$  die Verteilung von  $Y$ . Laut Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned} X \succeq_{SSD} Y &\iff \int f d\mu_X \geq \int f d\mu_Y \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f \\ &\iff E[f(X)] \geq E[f(Y)] \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f. \end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz folgt direkt aus der Definition des Erwartungswerts. Die Funktion  $f(x) = -x^2, x < 0$ , ist wachsend ( $f'(x) = -2x > 0$  für  $x < 0$ ) und konkav ( $f''(x) = -2 < 0$ ). Daher gilt

$$-E[X^2] \geq -E[Y^2] \iff E[X^2] \leq E[Y^2].$$

Somit erhalten wir

$$\text{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \leq E[Y^2] - (E[X])^2 = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \text{Var}(Y).$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da  $E[X] = E[Y]$  vorausgesetzt wurde.

## Aufgabe 6

**Lösungsvorschlag:**

- a) – Der *Value at Risk* zum Niveau  $\lambda \in (0, 1)$  einer Finanzposition  $X \in L^0$  ist gegeben durch

$$\text{VaR}_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_X^-(1 - \lambda) = \inf\{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\},$$

wobei  $q_X^+(\lambda) := \inf\{x : F_X(x) > \lambda\}$  und  $q_X^-(\lambda) := \inf\{x : F_X(x) \geq \lambda\}$ .

- Der *Average Value at Risk* zum Niveau  $\lambda \in (0, 1]$  einer Finanzposition  $X \in L^1$  ist gegeben durch

$$\text{AVaR}_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \text{VaR}_\gamma(X) d\gamma.$$

- b) Im Folgenden bezeichne  $F^{-1}(\alpha) := \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}, \alpha \in (0, 1)$ , die Quantilfunktion einer Verteilungsfunktion  $F$ . Es gilt  $q_X^+(\lambda) = F_X^{-1}(\lambda)$  für fast alle  $\lambda \in (0, 1)$ . Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} X \succeq_{FSD} Y &\iff F_X^{-1}(\lambda) \geq F_Y^{-1}(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in (0, 1) \\ &\implies q_X^+(\lambda) \geq q_Y^+(\lambda) \quad \text{für fast alle } \lambda \in (0, 1) \\ &\iff \text{VaR}_\lambda(X) \leq \text{VaR}_\lambda(Y) \quad \text{für fast alle } \lambda \in (0, 1). \end{aligned}$$

Die erste Äquivalenz gilt nach Satz 8.4 der Vorlesung.

- c) Sei  $\lambda \in (0, 1)$ . Unter den gegebenen Voraussetzungen sind die Verteilungsfunktionen  $F_X, F_Y$  invertierbar und  $F_X^{-1}, F_Y^{-1}$  sind ebenso strikt wachsend und stetig. Daher gilt  $q_X^+(\lambda) = F_X^{-1}(\lambda)$  für alle  $\lambda \in (0, 1)$ . Also

$$\text{VaR}_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda) = -F_X^{-1}(\lambda).$$

und analog

$$\text{VaR}_\lambda(Y) = -F_Y^{-1}(\lambda).$$

Wir setzen  $f(x) := F_X^{-1}(x) + F_Y^{-1}(x), x \in (0, 1)$ , und stellen fest, dass  $f$  nach Voraussetzung strikt wachsend, stetig ist und damit invertierbar (insbesondere  $f(f^{-1}(x)) = x$ ). Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\lambda(X + Y) &= \inf\{m : \mathbb{P}(X + Y + m < 0) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{m : \mathbb{P}(f(U) < -m) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{m : \mathbb{P}(U < f^{-1}(-m)) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{m : f^{-1}(-m) \leq \lambda\} \\ &= \inf\{m : m \geq -f(\lambda)\} \\ &= -f(\lambda) \\ &= -F_X^{-1}(\lambda) - F_Y^{-1}(\lambda) \\ &= -q_X^+(\lambda) - q_Y^+(\lambda) \\ &= \text{VaR}_\lambda(X) + \text{VaR}_\lambda(Y). \end{aligned}$$

Bei der vierten Gleichheit wurde verwendet, dass für eine gleichverteilte Zufallsvariable  $U \sim U(0, 1)$  gilt  $\mathbb{P}(U < x) = \mathbb{P}(U \leq x) = x$  für  $x \in (0, 1)$ .