

Bauerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min.

Lösung: offiziell

Bestanden mit: 16 P.

Bemerkungen: (zB Hilfsmittel, Nachklausur, etc)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden drei einperiodigen Finanzmärkte:

(A) $\Omega = \{u, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0 = 1$ und

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

(B) $\Omega = \{u, m, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0 = 1$ und

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{5}{9}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

(C) $\Omega = \{u, m, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und

$$S_1^1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = d, \end{cases} \quad S_1^2(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

- Welche der Modelle sind arbitragefrei? Beschreiben Sie für diese die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Finden Sie für alle anderen Modelle eine Arbitragestrategie und weisen Sie nach, dass es sich um eine Arbitragestrategie handelt.
- Welche der arbitragefreien Modelle sind vollständig? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreier, aber nicht notwendig vollständiger Finanzmarkt mit einem risikolosen Wertpapier und einer Aktie mit Preisprozess (S_t) . Es existieren drei Call-Optionen auf dieselbe Aktie mit gleichem Fälligkeitszeitpunkt $T > 0$ und verschiedenen Basiswerten (Strikes) $K_1 > 0$, $K_2 > K_1$ und $\frac{K_1+K_2}{2}$. Zur Zeit $t = 0$ betrage der Preis der Calls $C(K_1)$, $C(K_2)$ und $C(\frac{K_1+K_2}{2})$. Zeigen Sie durch Arbitrageüberlegungen, dass folgende Beziehung gilt:

$$2C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) \leq C(K_1) + C(K_2).$$

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die umgekehrte Ungleichung gilt und konstruieren Sie eine Arbitragestrategie. Verwenden Sie dazu folgende Tabelle:

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$			
	$S_T \leq K_1$	$K_1 < S_T \leq \frac{K_1 + K_2}{2}$	$\frac{K_1 + K_2}{2} < S_T \leq K_2$	$S_T > K_2$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein dreiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $u = \frac{3}{2}$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 1$ und $r = 0$. Wir betrachten eine amerikanische Lookback Call-Option mit der Auszahlung

$$H_t = S_t - \min_{0 \leq s \leq t} S_s, \quad t = 0, 1, 2, 3.$$

- Bestimmen Sie den Preis dieser amerikanischen Option zum Zeitpunkt $t = 0$. Geben Sie eine optimale Ausübungsstrategie an.
- Bestimmen Sie die Anfangsposition zur Zeit $t = 0$ einer Hedging-Strategie der Option.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir betrachten das Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz mit zwei risikobehafteten Anlagen mit den zufälligen Renditen R_T^1, R_T^2 . Die zugehörige Kovarianzmatrix der Renditen sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

wobei σ_1^2 die Varianz der Rendite R_T^1 , σ_2^2 die Varianz der Rendite R_T^2 und ρ den Korrelationskoeffizienten von R_T^1 und R_T^2 bezeichnen. Die Matrix Σ sei positiv definit.

- Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio π_{MVP} in Abhängigkeit von σ_1 , σ_2 und ρ .
- Zeigen Sie, dass für die minimale Varianz σ_{MVP}^2 gilt:

$$\sigma_{MVP}^2 < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\},$$

falls $\rho \neq \frac{\min\{\sigma_1, \sigma_2\}}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}}$, d. h. in diesem Fall ist die minimale Varianz kleiner als die der einzelnen Anlagen.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Gegeben sei eine Gleichverteilung μ auf den Punkten $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, d. h. $\mu(\{i\}) = \frac{1}{5}$, $i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

- Geben Sie eine Verteilung ν auf den Punkten $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ an, so dass $\mu \preceq_{FSD} \nu$ (bzw. $\mu \preceq_{\text{mon}} \nu$). Begründen Sie Ihre Wahl.
- Geben Sie eine Verteilung ν auf den Punkten $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ an, so dass $\mu \preceq_{SSD} \nu$ (bzw. $\mu \preceq_{\text{uni}} \nu$). Begründen Sie Ihre Wahl.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

- Definieren Sie Value at Risk and Average Value at Risk.
- Sei Y eine Zufallsvariable mit einer stetigen, strikt wachsenden Verteilungsfunktion F_Y und endlichem Erwartungswert. Zeigen Sie:

$$\text{VaR}_\lambda(Y) = -\inf\{x \in \mathbb{R} : \text{AVaR}_\lambda(\max\{Y, x\}) = -x\}, \quad \lambda \in (0, 1).$$

Hinweis: Für eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $F_{f(Y)}^{-1}(\cdot) = f(F_Y^{-1}(\cdot))$.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

- a) (A): Offenbar handelt es sich beim Finanzmarkt (A) um ein einperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit Up-Faktor $u = \frac{5}{3}$, Down-Faktor $d = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{1}{3}$. Wegen $d < r + 1 < u$, ist somit der Finanzmarkt (A) *arbitragefrei*. Es gilt $\mathbb{Q}(\{u\}) := q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ und damit ist die Menge aller äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q = \frac{2}{3} \right\}.$$

- (B): Für ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} auf $\Omega = \{u, m, d\}$ muss gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1}{B_1} \right] = S_0 &\iff \frac{5}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_2 + \frac{5}{9}q_3 = \frac{4}{3}, \\ q_1 + q_2 + q_3 &= \frac{4}{3}, \\ q_1, q_2, q_3 &> 0, \end{aligned}$$

wobei $q_1 := \mathbb{Q}(\{u\})$, $q_2 := \mathbb{Q}(\{m\})$, $q_3 := \mathbb{Q}(\{d\})$. Umstellen der zweiten Gleichung nach q_2 und Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}q_1 + \frac{2}{3}(1 - q_1 - q_3) + \frac{5}{9}q_3 &= \frac{4}{3} \\ \iff q_1 - \frac{1}{9}q_3 &= \frac{2}{3} \\ \iff q_1 &= \frac{6 + q_3}{9}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $q_1 \in (0, 1)$ für $q_3 \in (0, 1)$. Analog ergibt sich durch Umstellen der zweiten Gleichung nach q_1 und Einsetzen in die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(1 - q_1 - q_3)q_1 + \frac{2}{3}q_2 + \frac{5}{9}q_3 &= \frac{4}{3} \\ \iff -q_2 - \frac{10}{9}q_3 &= -\frac{1}{3} \\ \iff q_2 &= \frac{3 - 10q_3}{9}. \end{aligned}$$

Es gilt $q_2 \in (0, 1)$ falls $q_3 \in (0, \frac{3}{10})$. Somit ist die Menge aller äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 = \frac{6 + q_3}{9}, q_2 = \frac{3 - 10q_3}{9}, q_3 \in (0, \frac{3}{10}) \right\}.$$

Nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie ist somit der Finanzmarkt (B) *arbitragefrei*, da $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$.

Alternative Lösungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 \in \left(\frac{6}{9}, \frac{7}{10}\right), q_2 = 7 - 10q_1, q_3 = 9q_1 - 6 \right\}, \\ \mathcal{M}^* &= \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 = \frac{7 - q_2}{10}, q_2 \in \left(0, \frac{1}{3}\right), q_3 = \frac{3 - 9q_2}{10} \right\}. \end{aligned}$$

(C): Für ein Martingalmaß \mathbb{Q} auf $\Omega = \{u, m, d\}$ muss gelten $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^i}{B_1} \right] = S_0^i, i = 1, 2$, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}q_1 + \frac{5}{3}q_2 + \frac{8}{9}q_3 &= \frac{4}{3}, \\ \frac{5}{3}q_1 + \frac{5}{9}q_2 + \frac{8}{9}q_3 &= \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

wobei $q_1 := \mathbb{Q}(\{u\}), q_2 := \mathbb{Q}(\{m\}), q_3 := \mathbb{Q}(\{d\})$. Die Differenz der beiden Gleichungen liefert $q_2 = 0$. Somit existiert keine äquivalentes Martingalmaß, denn dafür müsste $q_1, q_2, q_3 > 0$ erfüllt sein. Also ist der Finanzmarkt (C) nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie *nicht arbitragefrei*.

Es ist leicht zu sehen, dass die Handelsstrategie $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ mit $\alpha_0 = (1, -1)$ und $\beta_0 = 0$ eine Arbitragestrategie ist. Tatsächlich ist

$$V_0^\varphi = \alpha_0^1 + \alpha_0^2 + \beta_0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

und

$$V_1^\varphi(\omega) = \alpha_0^1 S_1^1(\omega) + \alpha_0^2 S_1^2(\omega) + \beta_0 B_1 = S_1^1(\omega) - S_1^2(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Folglich gilt $\mathbb{P}(V_1^\varphi \geq 0) = 1$. Außerdem gilt $\mathbb{P}(V_1^\varphi > 0) > 0$, da $S_1^1(m) - S_1^2(m) = \frac{7}{9} > 0$.

b) Die Modelle (A) und (B) sind arbitragefrei, siehe a). Wir untersuchen somit nur (A) und (B) auf Vollständigkeit.

(A): Wir haben bei a) bereits festgestellt, dass der Finanzmarkt (A) ein CRR-Modell mit $d < 1 + r < u$ ist. Somit ist der Finanzmarkt (A) *vollständig*.

(B): Wir haben bei a) bereits gezeigt, dass $|\mathcal{M}^*| > 1$. Somit ist der Finanzmarkt (B) nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie *nicht vollständig*.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Lösungsvorschlag: Wir haben einen arbitragefreien Finanzmarkt und drei Call-Optionen C_1, C_2, C_3 auf dieselbe Aktie (S_t) mit gleicher Fälligkeit zum Zeitpunkt $T > 0$. Die Call-Optionen C_1, C_2 und C_3 haben die Strikes $K_1 > 0, K_2 > 0$ bzw. $\frac{K_1 + K_2}{2}$. Außerdem existiert ein risikoloses Wertpapier mit Verzinsung $r > -1$. Es ist zu zeigen:

$$2C\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) \leq C(K_1) + C(K_2) \iff 2C\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) - C(K_1) - C(K_2) \leq 0.$$

Dafür nehmen wir an, dass

$$B := 2C\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) - C(K_1) - C(K_2) > 0.$$

Nun konstruieren wir ein Portfolio, welches eine Arbitragestrategie liefert. Die folgende Tabelle stellt die Werte der Positionen des Portfolios zum Start $t = 0$ und zur Fälligkeit der Optionen $t = T$ dar, abhängig vom Marktverlauf.

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$			
	$S_T \leq K_1$	$K_1 < S_T \leq \frac{K_1 + K_2}{2}$	$\frac{K_1 + K_2}{2} < S_T \leq K_2$	$S_T > K_2$
verkaufe 2x Call mit Strike $\frac{K_1 + K_2}{2}$	0	0	$-2(S_T - \frac{K_1 + K_2}{2})$	$-2(S_T - \frac{K_1 + K_2}{2})$
kaufe 1x Call mit Strike K_1	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
kaufe 1x Call mit Strike K_2	0	0	0	$S_T - K_2$
investiere den Restbetrag $2C\left(\frac{K_1 + K_2}{2}\right) - C(K_1) - C(K_2)$ in Bond	$(1+r)^T B$	$(1+r)^T B$	$(1+r)^T B$	$(1+r)^T B$
Portfoliowert = 0	$(1+r)^T B > 0$	$S_T - K_1 + (1+r)^T B > 0$	$K_2 - S_T + (1+r)^T B > 0$	$(1+r)^T B > 0$

Das Portfolio zeigt, wenn wir zum Zeitpunkt $t = 0$ zweimal C_3 verkaufen, jeweils einmal C_1 und C_2 kaufen, und den Rest in den Bond investieren, so erhalten wir eine Arbitragestrategie, da die Auszahlung zum Zeitpunkt T mit einer positiven Wahrscheinlichkeit positiv ist (hier sogar mit Wahrscheinlichkeit 1). Dies ist ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit. Also gilt

$$2C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) - C(K_1) - C(K_2) \leq 0.$$

Alternativer Lösungsweg:

Aktion zur Zeit $t = 0$	Auszahlung zur Zeit $t = T$			
	$S_T \leq K_1$	$K_1 < S_T \leq \frac{K_1+K_2}{2}$	$\frac{K_1+K_2}{2} < S_T \leq K_2$	$S_T > K_2$
verkaufe 2x Call mit Strike $\frac{K_1+K_2}{2}$	0	0	$-2(S_T - \frac{K_1+K_2}{2})$	$-2(S_T - \frac{K_1+K_2}{2})$
kaufe 1x Call mit Strike K_1	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
kaufe 1x Call mit Strike K_2	0	0	0	$S_T - K_2$
Portfoliowert = $-C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) + C(K_1) + C(K_2) < 0$	0	$S_T - K_1 > 0$	$K_2 - S_T \geq 0$	0

Das Portfolio zeigt, wenn wir zum Zeitpunkt $t = 0$ zweimal C_3 verkaufen, jeweils einmal C_1 und C_2 kaufen, so erhalten wir einen Free Lunch, da $V_0^\varphi < 0$ und $\mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1$. Dies ist ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit, da man aus einem Free Lunch eine Arbitragemöglichkeit konstruieren kann. Also gilt

$$2C\left(\frac{K_1+K_2}{2}\right) - C(K_1) - C(K_2) \leq 0.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Lösungsvorschlag: Es sei $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\} \times \{u, d\}$.

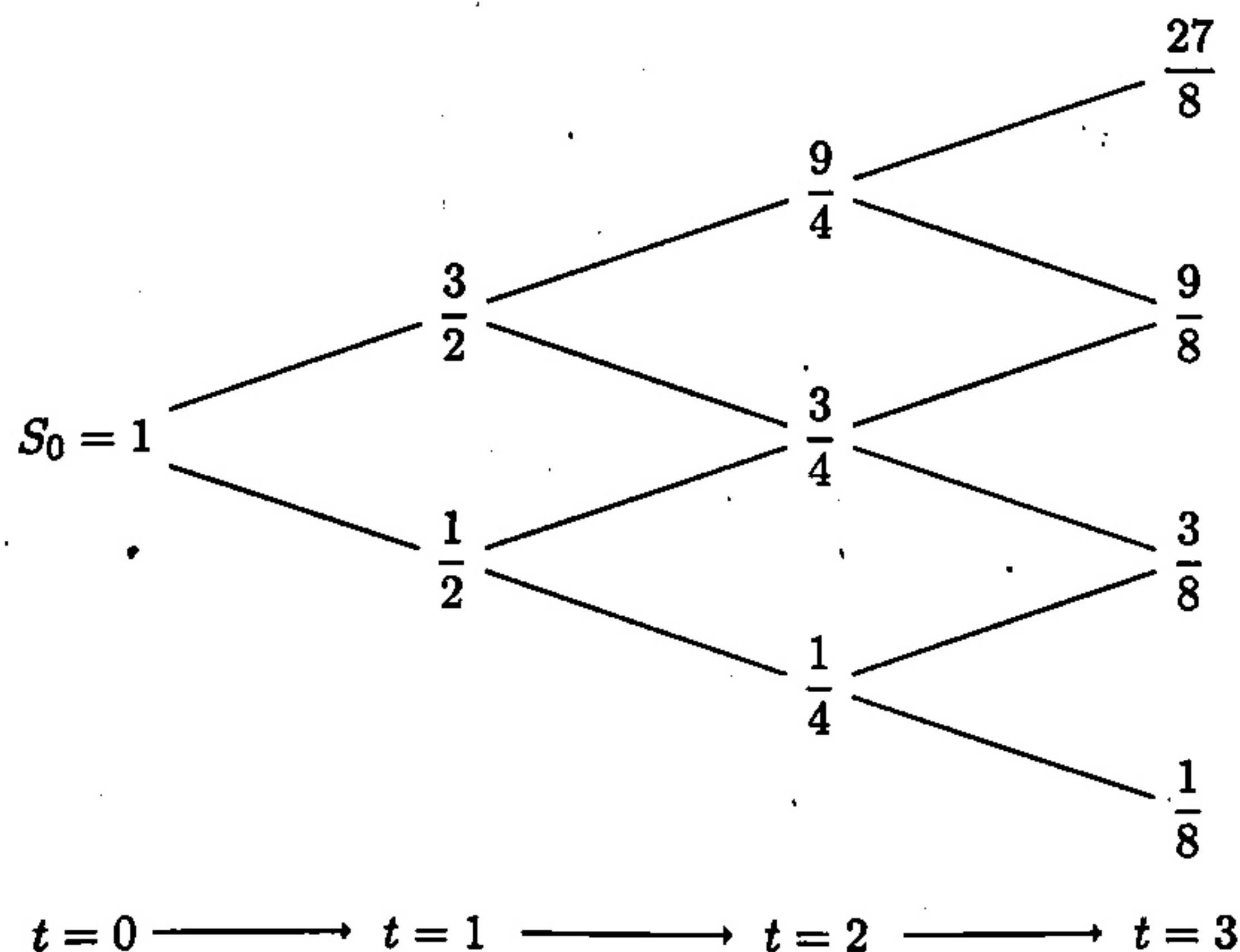
- a) Das gegebene CRR-Modell ist arbitragefrei und vollständig, da $d < 1 + r < u$. Das äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} ist durch den Parameter

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1}{2}$$

eindeutig festgelegt. Die risikolose Anlage B folgt dem deterministischen Verlauf

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = 1.$$

Die möglichen Entwicklungen des risikobehafteten Wertpapiers S sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Die amerikanische Lookback Call-Option entwickelt sich wie folgt:

$$H_0 = 0$$

$$H_1(u) = \frac{1}{2}, \quad H_1(d) = 0,$$

$$H_2(u, u) = \frac{5}{4}, \quad H_2(u, d) = 0, \quad H_2(d, u) = \frac{1}{4}, \quad H_2(d, d) = 0,$$

$$H_3(u, u, u) = \frac{19}{8}, \quad H_3(u, u, d) = \frac{1}{8}, \quad H_3(u, d, u) = \frac{3}{8}, \quad H_3(d, u, u) = \frac{5}{8},$$

$$H_3(u, d, d) = 0, \quad H_3(d, u, d) = 0, \quad H_3(d, d, u) = \frac{1}{8}, \quad H_3(d, d, d) = 0.$$

Bestimme die Snell-Einhüllende $Z = (Z_t)_{t=0,1,2,3}$ von $(H_t B_t^{-1})_{t=0,1,2,3}$, d.h.

$$Z_3 := \frac{H_3}{B_3} = H_3$$

$$Z_t := \max \left\{ \frac{H_t}{B_t}, \mathbb{E}_Q[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] \right\}, \quad t = 0, 1, 2.$$

Also

$$Z_3(u, u, u) = \frac{19}{8}, \quad Z_3(u, u, d) = \frac{1}{8}, \quad Z_3(u, d, u) = \frac{3}{8}, \quad Z_3(d, u, u) = \frac{5}{8},$$

$$Z_3(u, d, d) = 0, \quad Z_3(d, u, d) = 0, \quad Z_3(d, d, u) = \frac{1}{8}, \quad Z_3(d, d, d) = 0,$$

$$Z_2(u, u) = \max \left\{ \frac{5}{4}, \frac{1}{2} \left(\frac{19}{8} + \frac{1}{8} \right) \right\} = \frac{5}{4}, \quad Z_2(u, d) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} + 0 \right) \right\} = \frac{3}{16},$$

$$Z_2(d, u) = \max \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \left(\frac{5}{8} + 0 \right) \right\} = \frac{5}{16}, \quad Z_2(d, d) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} + 0 \right) \right\} = \frac{1}{16},$$

$$Z_1(u) = \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{16} \right) \right\} = \frac{23}{32}, \quad Z_1(d) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left(\frac{5}{16} + \frac{1}{16} \right) \right\} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16},$$

$$Z_0 = \max \{ H_0, \mathbb{E}_Q[Z_1] \} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \left(\frac{23}{32} + \frac{6}{32} \right) \right\} = \frac{29}{64}.$$

Nach der Vorlesung ist $\pi_0^A(H) = Z_0 = \frac{29}{64}$ der faire Preis der Option zum Zeitpunkt $t = 0$.

Für den optimalen Ausübungszeitpunkt τ^* gilt

$$\tau^* = \min \{ t \geq 0 : Z_t = H_t B_t^{-1} \},$$

d.h.

$$\tau^* = \begin{cases} 2, & \omega \in \{ \{u, u, u\}, \{u, u, d\} \}, \\ 3, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- b) Nach der Vorlesung existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ , so dass $V_t^\varphi = B_t Z_t$ für $t \leq \tau^*$ (Beachte: $B_t Z_t \geq H_t$ für alle t , da für die Snell-Einhüllende (Z_t) von $(H_t B_t^{-1})$ gilt $Z_t \geq H_t B_t^{-1}$ für alle t und $B_{\tau^*} Z_{\tau^*} = H_{\tau^*}$). Die Anfangsposition (α_0, β_0) zur Zeit $t = 0$ einer Hedging-Strategie φ der Option erfüllt also folgende Beziehung:

$$\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 \stackrel{\text{sf}}{=} V_1^\varphi = B_1 Z_1 = Z_1,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + B_1 = Z_1(u) & \iff \frac{3}{2} \alpha_0 + \beta_0 = \frac{23}{32}, \\ \alpha_0 S_1(d) + B_1 = Z_1(d) & \iff \frac{1}{2} \alpha_0 + \beta_0 = \frac{6}{32}. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten liefert

$$\alpha_0 = \frac{17}{32}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{17}{32} + \beta_0 = \frac{6}{32} \iff \beta_0 = -\frac{5}{64}.$$

Also ist $(\alpha_0, \beta_0) = (\frac{17}{32}, -\frac{5}{64})$ die Anfangsposition zur Zeit $t = 0$ einer Hedging-Strategie der Option. Für die Hedging-Strategie gilt

$$V_0^\varphi = \frac{17}{32} - \frac{5}{64} = \frac{29}{64} = \pi_0^A(H).$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Lauf Vorlesung gilt:

$$\pi_{MVP} = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e \quad \text{mit } C = e^\top \Sigma^{-1} e.$$

(Beachte: Die Annahme der Vorlesung, dass die Vektoren $e = (1, 1)$ und m (Vektor der erwarteten Renditen) linear unabhängig sind, ist für die Berechnung des Minimum-Varianz-Portfolios nicht notwendig.) Es gilt

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - (\rho \sigma_1 \sigma_2)^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$C = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - (\rho \sigma_1 \sigma_2)^2}$$

und somit

$$\pi_{MVP} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \\ \frac{\sigma_1^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2} \end{pmatrix}.$$

Alternativer Lösungsweg: Wir bezeichnen mit $\alpha \in [0, 1]$ den Anteil des Vermögens, der in die Anlage mit der Rendite R_T^1 investiert wird. Ein Portfolio aus beiden Anlagen ist somit gegeben durch $\pi = (\alpha, 1 - \alpha)$. Die Varianz eines Portfolios π ist

$$\begin{aligned} \sigma^2(\pi) &= \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \sigma_{12} \stackrel{\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}}{=} \alpha^2 \sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \rho \sigma_1 \sigma_2 \\ &= \underbrace{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2)}_{=:a} \alpha^2 - 2 \underbrace{(\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2)}_{=:b} \alpha + \underbrace{\sigma_2^2}_{=:c} \\ &= a\alpha^2 - 2b\alpha + c := f(\alpha) \end{aligned}$$

Wir bestimmen eine Minimumstelle von f :

$$f'(\alpha) = 2a\alpha - 2b \stackrel{!}{=} 0 \implies \alpha^* = \frac{b}{a} = \frac{\sigma_2^2 - \rho \sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2}.$$

Bei α^* handelt es sich um eine Minimumstelle von f , da

$$f''(\alpha) = 2a = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2) \stackrel{\rho \in [-1, 1]}{\geq} 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2) = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0.$$

(Alternative Begründung: Da $f(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha) \Sigma (\alpha, 1 - \alpha)^\top$ und aufgrund der positiven Definitheit von Σ , ist $f(\alpha)$ streng konvex und somit α^* eine eindeutige Minimumstelle.) Also ist das Minimum-Varianz-Portfolio π_{MVP}^* gegeben durch

$$\pi_{MVP} = \begin{pmatrix} \alpha^* \\ 1 - \alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \end{pmatrix}.$$

b) Laut Vorlesung ist die minimale Varianz σ_{MVP}^2 gegeben durch

$$\sigma_{MVP}^2 = \frac{1}{C} = \frac{\sigma_1^1\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_1^1\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \sigma_{MVP}^2 < \sigma_1^2 \\ \iff & \sigma_1^1\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 < \sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ \iff & 0 < (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2 \\ \iff & \rho \neq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$\sigma_{MVP}^2 < \sigma_2^2 \iff \rho \neq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Folglich ist $\sigma_{MVP}^2 < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$, falls $\rho \neq \frac{\min\{\sigma_1, \sigma_2\}}{\max\{\sigma_1, \sigma_2\}}$.

Alternativer Lösungsweg zur Berechnung der minimalen Varianz: Die minimale Varianz σ_{MVP}^2 ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sigma_{MVP}^2 &= f(\alpha^*) = f\left(\frac{b}{a}\right) = a\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2b\frac{b}{a} + c = -\frac{b^2}{a} + c = \frac{ac - b^2}{a} \\ &= \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^2 - (\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ &= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 + \sigma_2^4 - 2\sigma_2^2\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^4 + 2\sigma_2^2\rho\sigma_1\sigma_2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ &= \frac{\sigma_1^1\sigma_2^2(1 - \rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Die Forderung wird zum Beispiel von der Verteilung ν , definiert durch

$$\nu(\{i\}) = \delta_2(\{i\}) = \begin{cases} 0, & i \in \{-2, -1, 0, 1\}, \\ 1, & i = 2, \end{cases}$$

erfüllt, da

$$F_\mu(x) \leq F_\nu(x) \forall x \iff \mu \preceq_{FSD} \nu.$$

b) Die Forderung wird zum Beispiel von der Verteilung ν , definiert durch

$$\nu(\{i\}) = \begin{cases} 0, & i \in \{-2, -1, 1, 2\}, \\ 1, & i = 0, \end{cases}$$

erfüllt. Dazu betrachten wir zwei Zufallsvariablen $X \sim \nu$ und $Y \sim \mu$. Laut Vorlesung gilt:

$$\mu \preceq_{SSD} \nu \iff \mathbb{E}[f(Y)] \leq \mathbb{E}[f(X)] \text{ für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f.$$

erfüllt. Dazu betrachten wir zwei Zufallsvariablen $X \sim \nu$ und $Y \sim \mu$. Laut Vorlesung gilt:

$$\mu \preceq_{SSD} \nu \iff \mathbb{E}[f(Y)] \leq \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f.$$

Wegen der Jensenschen Ungleichung gilt für eine beliebige wachsende, konkave Funktion f

$$\mathbb{E}[f(Y)] \leq f(\mathbb{E}[Y]) = f\left(\sum_{i=-2}^2 \frac{1}{5}i\right) = f(0) = \mathbb{E}[f(X)].$$

Alternativer Lösungsweg: Für $\nu = \delta_2$ gilt $\mu \preceq_{SSD} \nu$, da $\mu \preceq_{FSD} \nu$ impliziert $\mu \preceq_{SSD} \nu$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Lösungsvorschlag:

- a) – Der *Value at Risk* zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ einer Finanzposition $X \in L^0$ ist gegeben durch

$$VaR_\lambda(X) := -q_X^+(\lambda) = q_{-X}^-(1 - \lambda) = \inf\{m : \mathbb{P}(X + m < 0) \leq \lambda\},$$

wobei $q_X^+(\lambda) := \inf\{x : F_X(x) > \lambda\}$ und $q_X^-(\lambda) := \inf\{x : F_X(x) \geq \lambda\}$.

- Der *Average Value at Risk* zum Niveau $\lambda \in (0, 1]$ einer Finanzposition $X \in L^1$ ist gegeben durch

$$AVaR_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_\gamma(X) d\gamma.$$

- b) Im Folgenden nutzen wir die Schreibweise $x \vee y := \max\{x, y\}$. Sei $\lambda \in (0, 1)$. Da Y eine Dichte besitzt, gilt $VaR_\lambda(Y) = -F_Y^{-1}(\lambda)$, wobei F_Y^{-1} die normale Umkehrfunktion ist. Außerdem ist F_Y^{-1} stetig und streng monoton wachsend. Somit gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$AVaR_\lambda(Y \vee x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_\gamma(Y \vee x) d\gamma = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda F_{Y \vee x}^{-1}(\gamma) d\gamma = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \max\{F_Y^{-1}(\gamma), x\} d\gamma,$$

wobei wir bei der dritten Gleichheit den Hinweis bezüglich der monoton wachsenden Funktion $f(y) = \max\{y, x\}$ genutzt haben. Um $AVaR_\lambda(Y \vee x)$ abzuschätzen, betrachten wir zwei Fälle:

- Fall: $x \geq F_Y^{-1}(\lambda) \iff F_Y(x) \geq \lambda$. Folglich ist $x \geq F_Y^{-1}(\gamma)$ für alle $\gamma \in (0, \lambda)$, da F_Y^{-1} wachsend ist. Somit gilt

$$\int_0^\lambda \max\{F_Y^{-1}(\gamma), x\} d\gamma = \int_0^\lambda x d\gamma = x\lambda.$$

Also $AVaR_\lambda(Y \vee x) = -x$.

- Fall: $x < F_Y^{-1}(\lambda) \iff F_Y(x) < \lambda$. Folglich existiert ein $\tilde{\gamma} \in (0, \lambda)$, so dass $x < F_Y^{-1}(\gamma)$ für alle $\gamma \in (\tilde{\gamma}, \lambda]$. Somit gilt

$$\int_0^\lambda \max\{F_Y^{-1}(\gamma), x\} d\gamma > \int_0^\lambda x d\gamma = x\lambda.$$

Also $AVaR_\lambda(Y \vee x) > -x$.

Damit erhalten wir

$$-\inf\{x \in \mathbb{R} : AVaR_\lambda(\max\{Y, x\}) = -x\} = -\inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq F_Y^{-1}(\lambda)\} = -F_Y^{-1}(\lambda) = VaR_\lambda(Y).$$