

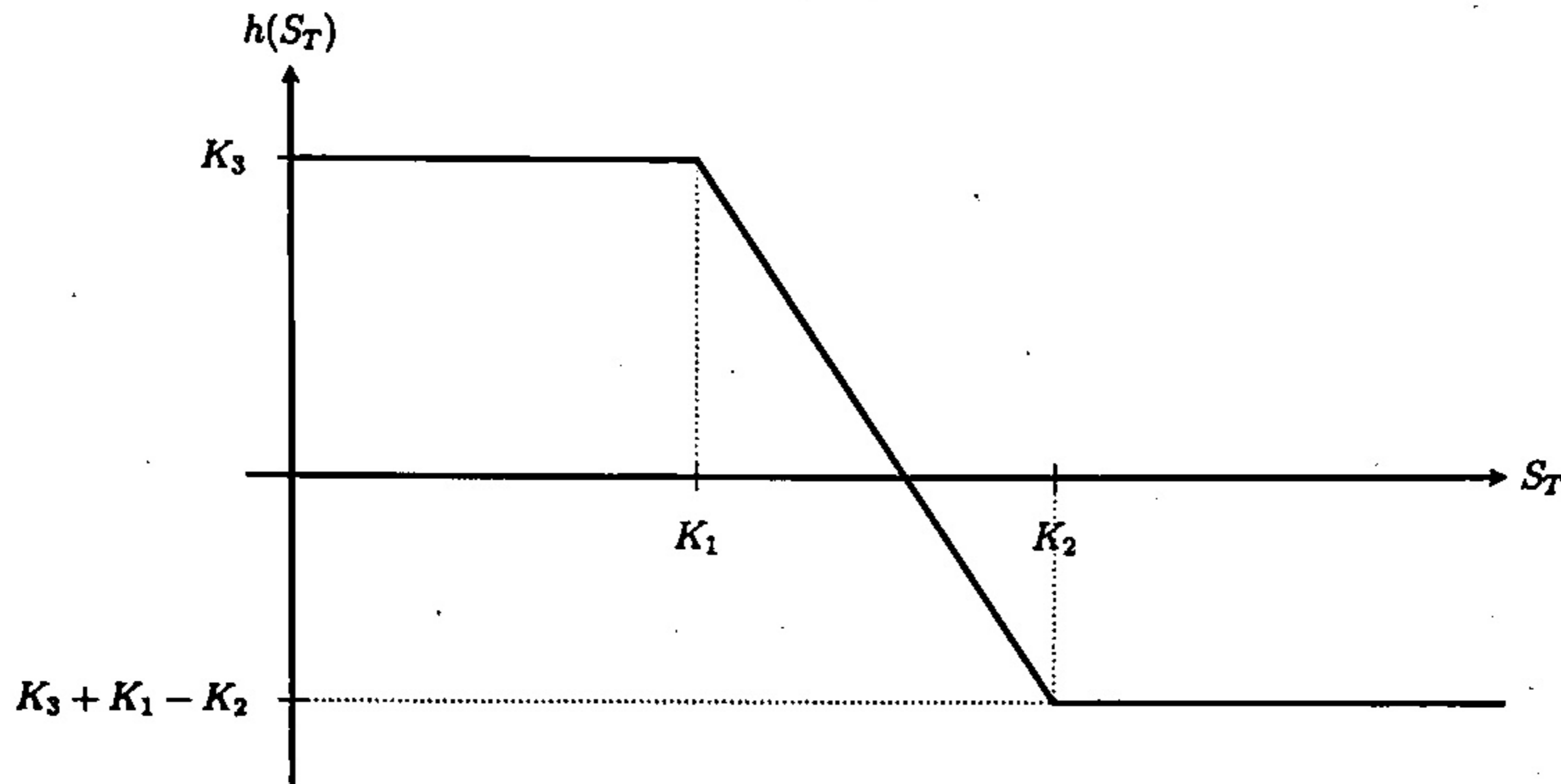
Bäuerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.  
Bemerkungen: Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

**Aufgabe 1 (2+3+2=7 Punkte)**

Betrachten Sie einen Zahlungsanspruch  $H = h(S_T)$  mit folgendem Auszahlungsprofil:

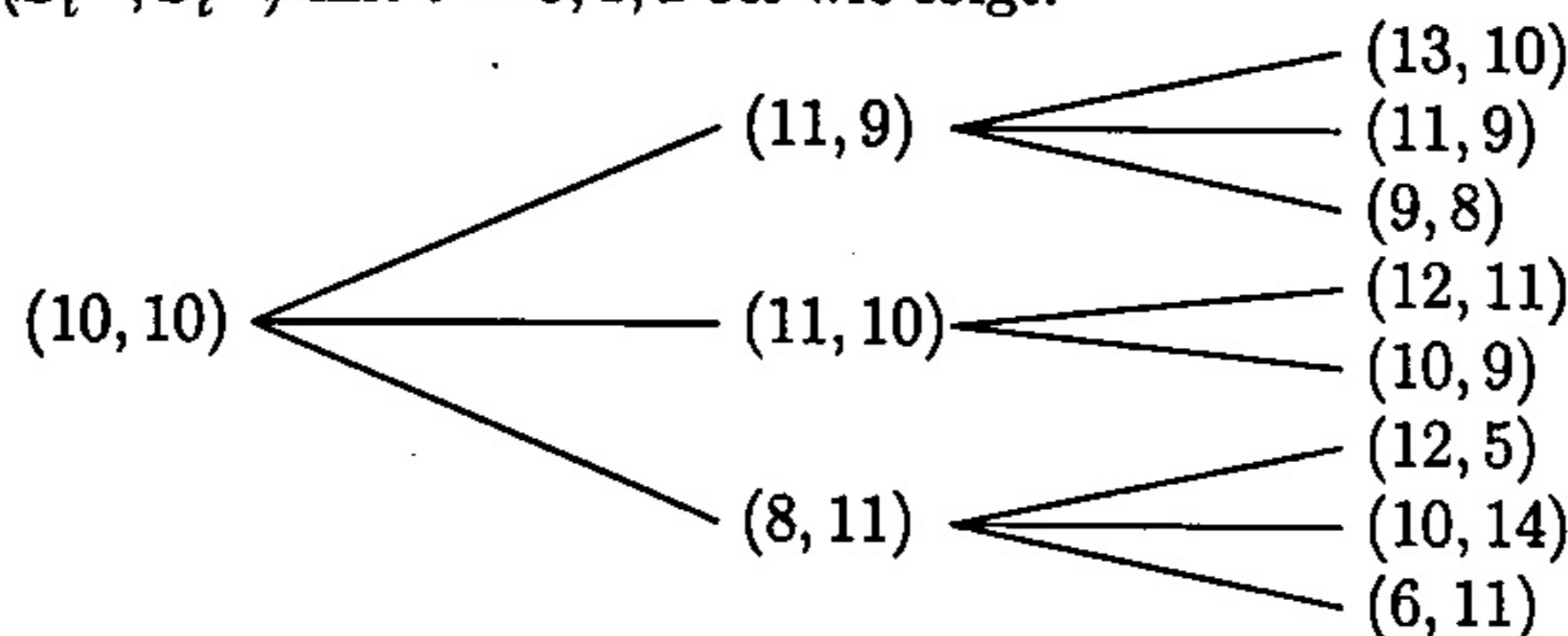


Hierbei sind  $0 \leq K_1 \leq K_2$ ,  $0 \leq K_3 \leq K_2 - K_1$  und  $S_T$  der Schlusskurs der zu Grunde liegenden Aktie.

- Bilden Sie  $H$  mit Europäischen Call-Optionen auf die selbe Aktie und durch eine Investition in den Bond nach.
- Berechnen Sie den Preis von  $H$  zur Zeit  $t = 0$  im zweiperiodigen Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit Parametern  $u = \frac{5}{4}$ ,  $d = \frac{4}{5}$ ,  $r = \frac{1}{20}$ ,  $K_1 = 75$ ,  $K_2 = 125$ ,  $K_3 = 30$  und  $S_0 = 100$ .
- Wie viele Aktien werden in der Hedgingstrategie für  $H$  zur Zeit  $t = 0$  gehalten?

**Aufgabe 2 (5+4=9 Punkte)**

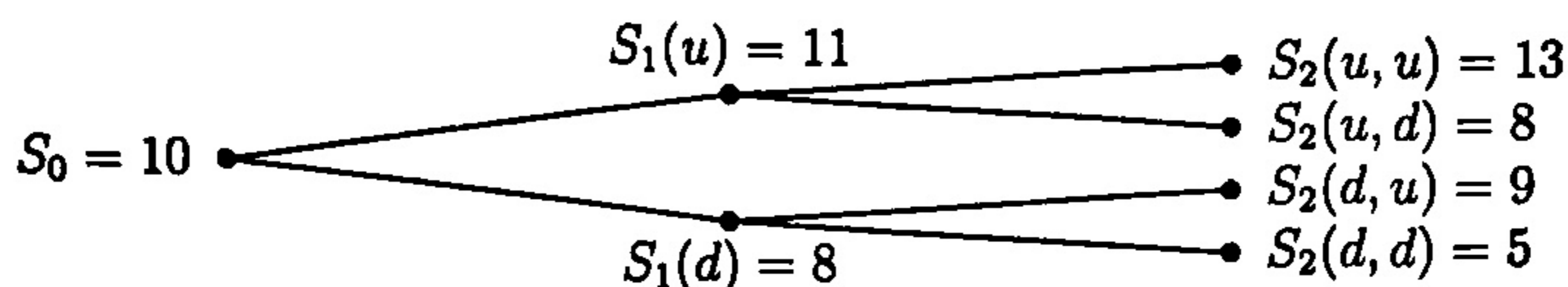
Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit zinsfreiem normierten Bond  $B$ , d.h.  $B_0 = B_1 = B_2 = 1$  und zwei Aktien  $S^{(1)}$  und  $S^{(2)}$ . Die Kursentwicklung der Aktien in Tupelschreibweise  $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$  mit  $t = 0, 1, 2$  sei wie folgt:



- Bestimmen Sie die Menge der Martingalmaße  $\mathcal{M}$  und die Menge der äquivalenten Martingalmaße  $\mathcal{M}^*$ .
- In welchem Preisintervall sollten arbitragefreie Preise für  $H_1 := (S_2^{(1)} - S_2^{(2)})^+$  und  $H_2 := (9 - S_2^{(2)})^+$  liegen? Ist einer der Zahlungsansprüche erreichbar?

### Aufgabe 3 (5+1=6 Punkte)

Gegeben sei folgender zweiperiodiger Finanzmarkt mit Zinsrate  $r = \frac{1}{20}$ :



- Bewerten Sie eine amerikanische Put-Option mit Basispreis  $K = 10$ .
- Bestimmen Sie die optimale Ausübungsstrategie für die amerikanische Put-Option aus a).

### Aufgabe 4 (2+1+1+2+1=7 Punkte)

Im Folgenden werden fünf Aussagen getroffen. Entscheiden Sie für alle Aussagen, ob diese korrekt oder falsch sind. Beweisen Sie korrekte Aussagen und widerlegen Sie falsche Aussagen mit einem Gegenbeispiel.

- Ein endlicher Finanzmarkt ist arbitragefrei genau dann, wenn es ein Martingalmaß gibt.
- Ist in einem endlichen Finanzmarkt der Call mit Basispreis  $K$  und Fälligkeit  $T$  auf die Aktie mit Kurs  $(S_t)$  erreichbar, so ist auch der Put mit Basispreis  $K$  und Fälligkeit  $T$  auf die selbe Aktie erreichbar.
- Im Markowitz-Modell kann stets ein Portfolio mit beliebig kleiner Varianz gefunden werden.
- Seien  $X \in L^1$  und  $\lambda \in (0, 1)$ . Es gilt stets  $AVaR_\lambda(X) \geq VaR_\lambda(X)$ .
- Die Summe zweier monetärer Risikomaße ist wieder ein monetäres Risikomaß.

### Aufgabe 5 (1+4=5 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Cox-Ross-Rubinstein-Markt mit Parametern  $u = \frac{5}{4}$ ,  $d = \frac{4}{5}$ ,  $r = 0$  und  $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2$ . Ein Investor mit Nutzenfunktion  $U$  und Anfangsvermögen  $x_0$  will seinen Endnutzen maximieren und erhält als optimales Endvermögen

$$X^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = \omega_1 \\ \frac{4}{5}, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

- Geben Sie das formale Optimierungsproblem des Investors an.
- Bestimmen Sie das Anfangsvermögen  $x_0$  und geben Sie eine mögliche Nutzenfunktion des Investors an.

### Aufgabe 6 (2+4=6 Punkte)

Es sei  $X \in L_+^1 := \{Y \in L^1 | Y \geq 0\}$  eine Zufallsvariable mit  $\mathbb{E}[X] < \infty$ . Weiter sei  $\rho : L_+^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$\rho(X) := - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X \geq x)) dx,$$

wobei  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine monoton wachsende Funktion mit  $g(0) = 0$  und  $g(1) = 1$  sei.

- Definieren Sie, wann ein Risikomaß monoton, translationsinvariant und positiv homogen heißt.
- Zeigen Sie, dass  $\rho$  ein monotones, translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß ist.

## Aufgabe 1 (2+3+2=7 Punkte)

Lösungsvorschlag:

a) Offenbar gilt für  $H$  die Darstellung

$$H = \begin{cases} K_3, & S_T \leq K_1 \\ K_3 + K_1 - S_T, & K_1 \leq S_T \leq K_2 \\ K_3 + K_1 - K_2, & S_T \geq K_2. \end{cases} \quad 1P.$$

Damit schreiben wir

$$\begin{aligned} H &= K_3 \mathbf{1}_{\{S_T \leq K_1\}} + (K_3 + K_1 - S_T) \mathbf{1}_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} + (K_3 + K_1 - K_2) \mathbf{1}_{\{K_2 \leq S_T\}} \\ &= K_3 - (S_T - K_1) \mathbf{1}_{\{K_1 \leq S_T \leq K_2\}} + (-(S_T - K_1) + (S_T - K_2)) \mathbf{1}_{\{K_2 \leq S_T\}} \\ &= K_3 - (S_T - K_1) \mathbf{1}_{\{K_1 \leq S_T\}} + (S_T - K_2) \mathbf{1}_{\{K_2 \leq S_T\}} \\ &= (S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_3. \quad 1P. \end{aligned}$$

$H$  kann also geschrieben werden als Kombination aus zwei Call-Optionen mit Basispreisen  $K_1$  und  $K_2$  und einer risikolosen Anlage in geeigneter Höhe.

b) Wir erhalten in diesem CRR-Markt die Werte  $S_2(dd) = 64$ ,  $S_2(ud) = S_2(du) = 100$  und  $S_2(uu) = 156.25$ ,  $B_1 = 21/20$  und  $B_2 = 441/400$ . Ferner sehen wir ein, dass  $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{5}{9}$  gilt. 1P.

Um nun den Wert des Zahlungsanspruches zu bestimmen müssen wir seine Auszahlungen berechnen. Es gelten

$$H(uu) = (156.25 - 125)^+ - (156.25 - 75)^+ + 30 = 31.25 - 81.25 + 30 = -20,$$

$$H(ud) = H(du) = (100 - 125)^+ - (100 - 75)^+ + 30 = -25 + 30 = 5$$

und

$$H(dd) = (64 - 125)^+ - (64 - 75)^+ + 30 = 30. \quad 1P.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \pi_0(H) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{H}{B_2} \right] = \frac{1}{B_2} [q^2 H(uu) + 2q(1-q)H(ud) + (1-q)^2 H(dd)] \\ &= \frac{400}{441} \left[ \frac{25}{81} \cdot (-20) + \frac{40}{81} \cdot 5 + \frac{16}{81} \cdot 30 \right] = \frac{400}{441} \frac{180}{81} = \frac{8000}{3969} = 2.0156... \quad 1P. \end{aligned}$$

c) Die Hedgingstrategie muss selbstfinanzierend sein, und die Auszahlung von  $H$  replizieren. Die Replikationseigenschaft gewährleistet, dass der Teil der Hedgingstrategie in Periode 1 gerade  $\pi_1(H)(u)$  bzw.  $\pi_1(H)(d)$  kostet. Diese Werte können wir leicht berechnen:

$$\pi_1(H)(u) = \frac{20}{21} \left( \frac{5}{9} \cdot (-20) + \frac{4}{9} \cdot 5 \right) = -\frac{1600}{189}$$

$$\pi_1(H)(d) = \frac{20}{21} \left( \frac{5}{9} \cdot 5 + \frac{4}{9} \cdot 30 \right) = \frac{2900}{189} \quad 1P.$$

Da die Hedgingstrategie selbstfinanzierend sein muss, muss gelten

$$\alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 = \pi_1(H)(u)$$

$$\alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 = \pi_1(H)(d),$$

sodass  $\alpha_0 = \frac{\pi_1(H)(u) - \pi_1(H)(d)}{S_0(u-d)} = -\frac{100}{189}$  gelten muss. 1P.

**Aufgabe 2 (5+4=9 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

a) Sei  $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$  die von  $(S^{(1)}, S^{(2)})$  erzeugte Filtration. Für ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  muss dann für  $t = 0, 1$  und  $i = 1, 2$  jeweils

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S_{t+1}^{(i)}}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_t^{(i)}}{B_t} \quad \frac{1}{2}P.$$

gelten. Für  $t = 0$  bedeutet das notwendigerweise (beachte:  $S_0^{(i)}$  ist  $\mathcal{F}_0$ -messbar)

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S_1^{(1)}}{B_1} \mid \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(1)}}{B_0} = (11 - 10)q_1 + (11 - 10)q'_1 + (8 - 10)(1 - q_1 - q'_1),$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S_1^{(2)}}{B_1} \mid \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(2)}}{B_0} = (9 - 10)q_1 + (10 - 10)q'_1 + (11 - 10)(1 - q_1 - q'_1).$$

Dabei bezeichnet  $q$  die Wahrscheinlichkeit des oberen Pfades und  $q'$  die Wahrscheinlichkeit des mittleren Pfades. Da wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß suchen, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des unteren Pfades zu  $(1 - q - q')$ . Vereinfacht ergibt sich

$$3q_1 + 3q'_1 = 2,$$

$$2q_1 + q'_1 = 1.$$

Die Lösung dieses LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen ist  $q_1 = q'_1 = \frac{1}{3}$ .  $\frac{1}{2}P.$

Für  $t = 1$  müssen wir in  $\mathcal{F}_1$  die drei möglichen Kursentwicklungen des ersten Schritts unterscheiden. Man erhält mit analogem Ansatz für jede der drei Möglichkeiten ein Gleichungssystem wie oben.

Im oberen Pfad erhalten wir das LGS

$$0 = (13 - 11)q_2(u) + (11 - 11)q'_2(u) + (9 - 11)(1 - q_2(u) - q'_2(u)),$$

$$0 = (10 - 9)q_2(u) + (9 - 9)q'_2(u) + (8 - 9)(1 - q_2(u) - q'_2(u)),$$

das vereinfacht zu

$$2 = 4q_2(u) + 2q'_2(u),$$

$$1 = 2q_2(u) + 1q'_2(u)$$

wird. Wir stellen fest, dass dieses durch  $q'_2(u) = 1 - 2q_2(u)$  gelöst wird. Damit ergibt sich insgesamt das Tripel der Wahrscheinlichkeiten  $(q_2(u), 1 - 2q_2(u), q_2(u))$ .  $1P.$

Die Lösungen für die übrigen LGS sind mit gleicher Benennung  $q_2(m) = \frac{1}{2}$  für den (nur zweiarmigen) mittleren Zweig und  $q_2(d) = \frac{1}{7}, q'_2(d) = \frac{2}{7}$  für den unteren Zweig.  $1P.$

Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu bestimmen, muss man die zum Pfad gehörenden  $q$ 's multiplizieren. Nummeriert man die Ereignisse von oben nach unten durch, und bezeichnet den freien Parameter  $q_2(u)$  mit  $q$  findet man

$\omega$	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$
uu	$\frac{q}{3}$
um	$\frac{1-2q}{3}$
ud	$\frac{q}{3}$
mu	$\frac{1}{6}$
md	$\frac{1}{6}$
du	$\frac{1}{21}$
dm	$\frac{2}{21}$
dd	$\frac{4}{21}$

Nach Konstruktion ist also jedes derartige  $\mathbb{Q}$  ein Martingalmaß, d.h. alle Wahrscheinlichkeitsmaße von dieser Form bilden die Menge  $\mathcal{M}$ . Damit es sich um Wahrscheinlichkeitsmaße handelt, muss offenbar  $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$  gelten. Damit jedes der 8 Elementarereignisse unter  $\mathbb{Q}$  eine echt positive Wahrscheinlichkeit hat, und somit ein  $\mathbb{P}$ -äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss sogar gelten  $0 < q < \frac{1}{2}$ . Diese Maße bilden die Menge  $\mathcal{M}^*$ . 1P.

b) Wir notieren die Auszahlungen der Option in einer gemeinsamen Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten, dass sie realisiert werden.

$\omega$	$(S_2^{(1)}(\omega) - S_2^{(2)}(\omega))^+$	$(9 - S_2^{(2)}(\omega))^+$	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$
uu	3	0	$\frac{q}{3}$
um	2	0	$\frac{1-2q}{3}$
ud	1	1	$\frac{q}{3}$
mu	1	0	$\frac{1}{6}$
md	1	0	$\frac{1}{6}$
du	7	4	$\frac{1}{21}$
dm	0	0	$\frac{2}{21}$
dd	0	0	$\frac{4}{21}$

Damit ergibt sich für die Preise in Abhängigkeit von  $q$

$$\pi_0(H_1) = 3 \cdot \frac{q}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1-2q}{3}\right) + \frac{q}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{3} \quad 1P.$$

und

$$\pi_0(H_2) = \frac{q}{3} + 4 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{21} + \frac{q}{3} \quad 1P.$$

Wir stellen fest, dass der Preis von  $H_1$  unabhängig von  $q$  ist, und somit gilt  $\pi_-(H_1) = \pi_+(H_1) = \frac{4}{3}$ . Ferner erhalten wir

$$\pi_-(H_2) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_2] = \inf_{q \in (0, \frac{1}{2})} \frac{4}{21} + \frac{q}{3} = \frac{4}{21} \quad \frac{1}{2}P.$$

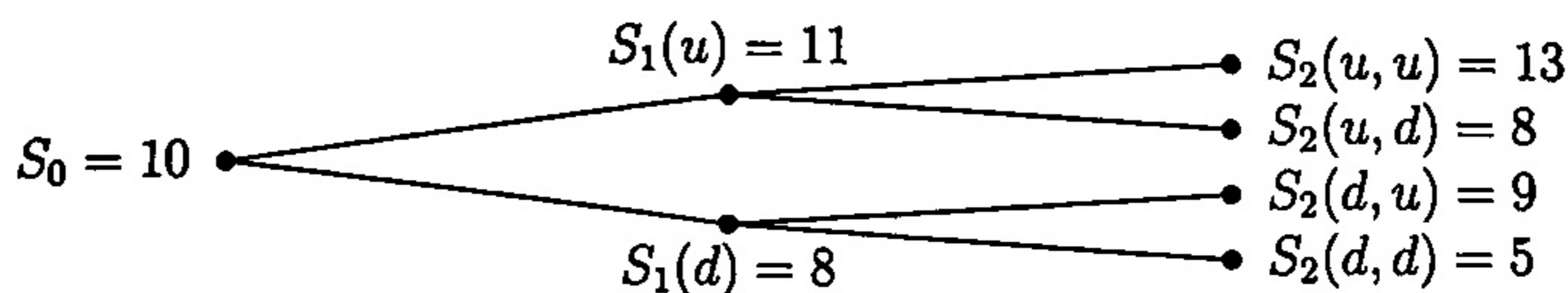
und

$$\pi_+(H_2) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_2] = \sup_{q \in (0, \frac{1}{2})} \frac{4}{21} + \frac{q}{3} = \frac{8}{42} + \frac{7}{42} = \frac{15}{42} \quad \frac{1}{2}P.$$

Da der Preis von  $H_1$  eindeutig bestimmt ist, ist der Zahlungsanspruch erreichbar. 1P.

### Aufgabe 3 (5+1=6 Punkte)

Lösungsvorschlag: Gegeben sei folgender endlicher Finanzmarkt mit Zinsrate  $r = 0,05$ :



Wir wollen einen amerikanischen Put auf  $S$  mit Basispreis  $K = 10$  bewerten und entscheiden, ob die Option sinnvoll vor Erreichen des Periodenendes ausgeübt wird (und in welchem Fall das so wäre). Die Auszahlung ist hier  $H_t = (K - S_t)^+$ ,  $t = 0, 1, 2$ . Für beide Fragen müssen wir die Snell-Einhüllende  $Z$  von  $(\frac{H_t}{B_t})$  bestimmen und dazu benötigen wir ein äquivalentes Martingalmaß  $\mathbb{Q}$ . Wir lesen zunächst die einzelnen  $u$ 's und  $d$ 's aus dem Diagramm ab und bestimmen daraus wie im CRR-Modell die Einschnitt-Faktoren von  $\mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{11}{10}, & d_1 &= \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, & q(u) &= \frac{1+r-d_1}{u_1-d_1} = \frac{5}{6}, \\
 u_2(u) &= \frac{13}{11}, & d_2(u) &= \frac{8}{11}, & q(u|u) &= \frac{1+r-d_2(u)}{u_2(u)-d_2(u)} = \frac{71}{100}, \\
 u_2(d) &= \frac{9}{8}, & d_2(d) &= \frac{5}{8}, & q(u|d) &= \frac{1+r-d_2(d)}{u_2(d)-d_2(d)} = \frac{17}{20}. \quad 1P.
 \end{aligned}$$

a) Wir benötigen die Höhe der Auszahlung des Puts zu jedem denkbaren Ausübungszeitpunkt:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 0, & H_1(u) &= 0, & H_2(u, u) &= 0, \\
 & & & & H_2(u, d) &= 2, \\
 & & H_1(d) &= 2, & H_2(d, u) &= 1, \\
 & & & & H_2(d, d) &= 5. \quad 1P.
 \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen rechnen wir  $(Z_t)_{t=0,1,2}$  aus. Am Ende gilt  $Z_2(\omega) = \frac{H(\omega)}{B_2}$  für alle  $\omega$ , also

$$Z_2(u, u) = 0, \quad Z_2(u, d) = 2 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2, \quad Z_2(d, u) = 1 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2, \quad Z_2(d, d) = 5 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2. \quad 1P.$$

Für  $t = 1$  erhalten wir rekursiv  $Z_1(\omega) = \max\left\{\frac{H_1(\omega)}{B_1}, \mathbb{E}_Q[Z_2 | \mathcal{F}_1](\omega)\right\}$ , also

$$\begin{aligned}
 Z_1(u) &= \max\{0, q(u|u)Z_2(u, u) + (1 - q(u|u))Z_2(u, d)\} \\
 &= \max\left\{0, 0 + \frac{29}{100} \cdot 2 \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2\right\} = \frac{232}{441}, \\
 Z_1(d) &= \max\left\{2 \cdot \frac{20}{21}, q(u|d)Z_2(d, u) + (1 - q(u|d))Z_2(d, d)\right\} \\
 &= \max\left\{\frac{40}{21}, \left(\frac{17}{20} + \frac{15}{20}\right) \cdot \left(\frac{20}{21}\right)^2\right\} = \frac{40}{21}. \quad (\clubsuit) \quad 1P.
 \end{aligned}$$

Schließlich finden wir für  $t = 0$

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \max\left\{\frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_Q[Z_1 | \mathcal{F}_0]\right\} \\
 &= \max\{0, q(u)Z_1(u) + (1 - q(u))Z_1(d)\} \\
 &= \max\left\{0, \frac{5}{6} \cdot \frac{232}{441} + \frac{1}{6} \cdot \frac{40}{21}\right\} = \frac{1000}{1323} \quad 1P.
 \end{aligned}$$

und der Preis der Option ist  $\pi^A(H) = Z_0 \approx 0,756$ .

b) An der mit  $(\clubsuit)$  markierten Stelle zieht die Snell-Einhüllende den aktuellen Wert dem erwarteten Wert des nächsten Schrittes vor, hier wird optimalerweise vorzeitig ausgeübt. Man erhält

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{(d, u), (d, d)\} \\ 2, & \omega \in \{(u, u), (u, d)\} \end{cases}. \quad 1P.$$

**Aufgabe 4 (2+1+1+2+1=7 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

a) Die Aussage ist falsch. Sei dazu  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $B_0 = B_1 = 1$ ,  $S_0 = 1$ ,  $S_1(\omega_1) = 1$ ,  $S_1(\omega_2) = 2$  und  $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\{\omega_2\})$ . Dieser Markt ist nicht arbitragefrei, denn mit  $\phi = (1, -1)$  erhalten wir  $V_0^\phi = 0 = V_1^\phi(\{\omega_1\})$  und  $V_1^\phi(\{\omega_2\}) = 1$ , aber  $\mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = 0$  und  $\mathbb{Q}(\{\omega_2\}) = 1$  ist ein Martingalmaß. 2P.

b) Die Aussage ist korrekt. Wegen  $(K - S_T)^+ = (S_T - K)^+ + K - S_T$  liefert eine Hedging-Strategie für den Call immer auch eine Hedgingstrategie für den Put, da Bond und Aktie erreichbar sind. 1P.

c) Die Aussage ist falsch. Das Portfolio mit der minimalen Varianz ist  $\pi_{MVP}^* = \frac{1}{c} \Sigma^{-1} e$  mit Varianz  $\frac{1}{c} > 0$ . 1P.

d) Die Aussage ist korrekt. Nach Definition gilt

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_\gamma(X) d\gamma \geq \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_\lambda(X) d\gamma = VaR_\lambda(X),$$

da der Value-at-Risk monoton im Niveau  $\gamma$  ist. 2P.

e) Die Aussage ist falsch. Seien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei monetäre Risikomaße, dann gilt für  $c \geq 0$

$$(\rho_1 + \rho_2)(X + c) = \rho_1(X + c) + \rho_2(X + c) = \rho_1(X) - c + \rho_2(X) - c = (\rho_1 + \rho_2)(X) - 2c,$$

auf der rechten Seite müsste aber  $(\rho_1 + \rho_2)(X) - c$  stehen, damit es sich um eine monetäres Risikomaß handeln kann. 1P.

**Aufgabe 5 (1+4=5 Punkte)**

**Lösungsvorschlag:**

a) Das Optimierungsproblem lautet

$$\max \mathbb{E}[U(V_T^\varphi)] \quad \text{s.t.} \quad V_0^\varphi \leq x_0, \quad \varphi \text{ selbstfinanzierend.} \quad 1P.$$

b) Das äquivalente Martingalmaß ist gegeben durch den Parameter  $\mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{4}{9}$ . Damit ergibt sich für die State price density

$$Z(\omega_i) = \frac{\mathbb{Q}(\{\omega_i\})}{\mathbb{P}(\{\omega_i\})} = \begin{cases} \frac{8}{9} & \omega = \omega_1 \\ \frac{10}{9} & \omega = \omega_2. \end{cases} \quad 1P.$$

Dann muss für das optimale Endvermögen gelten

$$x_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X^*] = \mathbb{E}[ZX^*] = \frac{1}{2} \left( \frac{8}{9} \cdot 1 + \frac{10}{9} \cdot \frac{4}{5} \right) = \frac{8}{9}. \quad 1P.$$

Ferner gilt bekanntermaßen  $X^* = I(y^*Z)$ . Es muss also gelten

$$I(y^*Z(\omega)) = \begin{cases} 1 = \frac{9}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{x_0}{Z(\omega)}, & \omega = \omega_1 \\ \frac{4}{5} = \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} = \frac{x_0}{Z(\omega)}, & \omega = \omega_2, \end{cases}$$

Das ist  $I(y^*Z(\omega)) = \frac{x_0}{Z(\omega)}$ . Damit ergibt sich die allgemeine Form

$$I(x) = \frac{x_0 \cdot y^*}{x} \iff U'(x) = \frac{x_0 \cdot y^*}{x} \iff U(x) = x_0 \cdot y^* \cdot \ln(x).$$

Eine mögliche Nutzenfunktion für den Investor ist daher  $U(x) = \ln(x)$ . 2P. (Es ergibt sich  $y^* = \frac{1}{x_0}$ .)

## Aufgabe 6 (2+4=6 Punkte)

## Lösungsvorschlag:

a) Monotonie:  $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y)$ ,

Translationsinvarianz:  $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$ ,

und positive Homogenität:  $\rho(\alpha X) = \alpha \rho(X)$ ,  $\alpha \geq 0$  2P.

b) • Es sei  $X \leq Y$ . Dann gilt offenbar  $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \mathbb{P}(Y \geq x)$ . Da  $g$  monoton wachsend ist, folgt  $g(\mathbb{P}(X \geq x)) \leq g(\mathbb{P}(Y \geq x))$  und damit nach Definition von  $\rho(X)$  mit der Monotonie des Integrals sofort  $\rho(X) \geq \rho(Y)$ . 1P.

• Sei  $c \in \mathbb{R}_+$ . Es gilt

$$\rho(X + c) = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X + c \geq x)) dx = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X \geq x - c)) dx.$$

Substituieren wir nun  $x - c$  durch  $y$  so erhalten wir

$$\rho(X + c) = - \int_{-c}^\infty g(\mathbb{P}(X \geq y)) dy = - \int_{-c}^0 g(\mathbb{P}(X \geq y)) dy - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X \geq y)) dy.$$

Für  $x \leq 0$  ist natürlich  $\mathbb{P}(X \geq x) = 1$  und damit auch  $g(\mathbb{P}(X \geq x)) = 1$ , sodass wir erhalten

$$\rho(X + c) = - \int_{-c}^0 1 dy + \rho(X) = \rho(X) - c. \quad \frac{3}{2}P.$$

• Sei  $\alpha > 0$ . Dann gilt

$$\rho(\alpha X) = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(\alpha X \geq x)) dx = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X \geq \frac{x}{\alpha})) dx.$$

Wir substituieren nun  $\frac{x}{\alpha}$  mit  $y$ , also  $dx$  mit  $\alpha dy$ , und erhalten

$$\rho(\alpha X) = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X \geq y)) \alpha dy = \alpha \rho(X). \quad 1P.$$

Sei nun  $\alpha = 0$ . Dann gilt  $\rho(\alpha X) = \rho(0) = - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(0 \geq x)) dx = 0 = \alpha \rho(X)$ , da  $\mathbb{P}(0 \geq x)$  für alle  $x > 0$  gleich 0 ist.  $\frac{1}{2}P.$