Bäuerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.

Nachklausur, Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Aufgabe 1 (2+5=7 Punkte)

Betrachten Sie ein dreiperiodiges CRR-Modell mit Parametern $S_0 = 1$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $r = 0$.

a) Bestimmen Sie den Preis einer Europäischen Call-Option H mit Fälligkeit $T = 3$ und Basispreis $K = 1$.

b) Es sei $\alpha \in (0,1)$. Betrachten Sie die sogenannte Pay-Later-Option H^α zur Call-Option aus Teil a) mit Preis $(1-\alpha)V$ und Auszahlung

$$H^\alpha = H^\alpha(S_3) = \begin{cases} S_3 - 1 - \alpha V, & S_3 > 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie $V \in \mathbb{R}$ so, dass $(1-\alpha)V$ in der Tat der No-Arbitrage-Preis von H^α ist. Geben Sie eine intuitive Erklärung für das Verhältnis der Preise von H und H^α an.

Aufgabe 2 (5+1+2=8 Punkte)

Betrachten Sie ein dreiperiodiges CRR-Modell mit Parametern $S_0 = 1$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $r = 0$ und darin die Amerikanische Up-and-out-Call-Option $H = (H_n)_{n=0,1,2,3}$ mit Auszahlung

$$H_n = \begin{cases} (S_n - K)^+, & S_k \leq 3 \text{ für alle } k \leq n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Preis von H zur Zeit 0 für $K = \frac{1}{3}$.

b) Bestimmen Sie die optimale Ausübungsstrategie.

c) Bestimmen Sie eine Hedgingstrategie für H zum Zeitpunkt $t = 0$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Im Folgenden werden vier Aussagen getroffen. Entscheiden Sie für alle Aussagen, ob diese korrekt oder falsch sind. **Beweisen** Sie korrekte Aussagen und **widerlegen** Sie falsche Aussagen mit einem Gegenbeispiel.

a) In einem arbitragefreien, aber nicht vollständigen Finanzmarkt gibt es immer unendlich viele äquivalente Martingalmaße.

b) Im Markowitz-Modell ist die Konvexkombination zweier effizienter Portfolios wieder effizient, d.h. sind π_1 und π_2 effizient, so auch $\alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2$ für alle $\alpha \in (0,1)$.

c) Sei $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1,2$. Dann gilt: $\mu_1 \geq \mu_2 \wedge \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \Rightarrow X_1 \geq_{\text{SSD}} X_2$, (auch mit $\geq_{uni}$ oder $\geq_{icv}$ bezeichnet).

d) Ein positiv homogenes und subadditives Risikomaß ist immer auch konvex.

Aufgabe 4 (4+3=7 Punkte)
Betrachten Sie ein CRR-Modell mit N Perioden und $d < 1 < u$ sowie $r = 0$. In diesem Modell optimiert ein Investor mit Anfangsvermögen $x_0 > 0$ und Nutzenfunktion

$$U(x) := -\frac{1}{x}, \quad x > 0$$

sein Endvermögen.

a) Bestimmen Sie das optimale Endvermögen mit der Martingalmethode in Abhängigkeit von $Z(\omega) = \frac{1}{B_T}\frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} = \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}, \quad \omega \in \Omega$.

b) Bestimmen Sie im Fall $N = 1$ die Anzahl der gehaltenen Aktien der optimalen Strategie in Abhängigkeit von $Z, \mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)

a) Geben Sie zwei verschiedene Darstellungen für den Average-Value-at-Risk $AVaR_\lambda$ an.

b) Zeigen Sie, dass $\lambda \mapsto AVaR_\lambda$, $\lambda \in (0,1)$ eine monoton nicht-wachsende Funktion ist.

Hinweis: Es gibt eine geeignete Darstellung für den Average-Value-at-Risk aus der Vorlesung, sodass der Beweis zu Teil b) sehr einfach wird.

Aufgabe 6 (1+5=6 Punkte)
Es seien X, Y zwei reellwertige Zufallsvariablen. Wir schreiben

$$X \leq_{cv} Y :\iff \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)],$$

für alle konkaven Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Erwartungswerte existieren.

a) Definieren Sie die stochastische Dominanz zweiter Ordnung, $X \leq_{SSD} Y$, (auch mit $\leq_{uni}$ oder $\leq_{icv}$ bezeichnet).

b) Zeigen Sie: $X \leq_{cv} Y \iff X \leq_{SSD} Y$ und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$.

Hinweis: Betrachten Sie in Teilaufgabe b) für konkaves f zunächst den Fall, dass ein $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\hat{f}(x) := f(x) + \alpha x$ monoton wachsend ist.

Aufgabe 1 (2+5=7 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Es ist

$$q = \frac{1-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

und für den Preis der Aktie gelten

$$\begin{aligned} S_3(uuu) &= 8, \\ S_3(uud) = S_3(udu) = S_3(duu) &= 2, \\ S_3(udd) = S_3(dud) = S_3(ddu) &= \frac{1}{2}, \\ S_3(ddd) &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für die Auszahlung der Call-Option

$$\begin{aligned} H(uuu) &= 7, \\ H(uud) = H(udu) = H(duu) &= 1. \end{aligned}$$

In allen anderen Fällen zahlt die Call-Option nichts aus. 1P.

Damit folgt für den Preis der Call-Option nach der Preisformel

$$\pi_0(H) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 7 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{13}{27}. \quad 1P.$$

b) Offenbar muss die Bedingung

$$(1-\alpha)V = \pi_0(H^\alpha) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[((S_3-1)-\alpha V)\mathbb{1}_{\{S_3>1\}}]$$

erfüllt sein. 1P.

Die rechte Seite schreiben wir um:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[((S_3-1)-\alpha V)\mathbb{1}_{\{S_3>1\}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_3-1)^+] - \alpha V \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{S_3>1\}}] \\ &= \pi_0(H) - \alpha V \mathbb{Q}(S_3 > 1). \quad 1P. \end{aligned}$$

Offenbar gilt $S_3(\omega) > 1 \iff \omega \in \{uuu, uud, udu, duu\}$, sodass folgt

$$\mathbb{Q}(S_3 > 1) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{7}{27}. \quad 1P.$$

Damit erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[((S_3-1)-\alpha V)\mathbb{1}_{\{S_3>1\}}] = \frac{13}{27} - \alpha V \frac{7}{27}.$$

Durch Auflösen der ersten Gleichung nach V erhalten wir

$$V = \frac{13}{27}\left(1 - \alpha\frac{20}{27}\right)^{-1}. \quad 1P.$$

Offenbar gilt nun

$$\pi_0(H^\alpha) = (1-\alpha)V = (1-\alpha)\frac{13}{27}\left(1-\alpha\frac{20}{27}\right)^{-1} = \frac{1-\alpha}{1-\frac{20}{27}\alpha}\pi_0(H) \le \pi_0(H).$$

Die Intuition ist, dass der Preis für die Pay-later-Option zu Beginn niedriger ist als der für die klassische Call-Option, da später im Ausübungsfall noch eine (Nach-)zahlung fällig wird. Beachte hierbei auch, dass $V \geq \pi(H)$ gilt, mit Gleichheit für $\alpha = 0$, da die Pay-Later-Option insgesamt vorteilhaft gegenüber der klassischen Option ist. 1P.

Aufgabe 2 (5+1+2=8 Punkte)

Lösungsvorschlag: Es ist wieder

$$q = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

a) Die Auszahlung der Barriereoption ist pfadabhängig, sodass alle Trajektorien betrachtet werden müssen. In den folgenden Tabellen tragen wir die Werte der Aktie und die zugehörigen Werte der Option für alle $\omega \in \Omega$ ein.

ω	$\exists t : S_t(\omega) \geq 3$	$S_3(\omega)$	$H_3(\omega)$	$S_2(\omega)$	$H_2(\omega)$	$S_1(\omega)$	$H_1(\omega)$	$S_0(\omega)$	$H_0(\omega)$
uuu	ja	8	0	4	0	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
uud	ja	2	0	4	0	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
udu	nein	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
udd	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
duu	nein	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
dud	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
ddu	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
ddd	nein	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$

2P.

Da keine Diskontierung notwendig ist gilt $Z_3(\omega) = H_3(\omega)$, wobei Z die Snell-Einhüllende bezeichnet. Es gelten also in $t = 2$

$$Z_2(uu) = \max\{0, \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0\} = \max\{0, 0\} = 0, \quad \frac{1}{2}P.$$

$$Z_2(ud) = Z_2(du) = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3} \quad \frac{1}{2}P.$$

und

$$Z_2(dd) = \max\{0, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot 0\} = \frac{1}{18}. \quad \frac{1}{2}P.$$

Damit erhalten wir für $t = 1$

$$Z_1(u) = \max\{\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\} = \frac{5}{3} \quad \frac{1}{2}P.$$

und

$$Z_1(d) = \max\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18}\} = \frac{7}{27}. \quad \frac{1}{2}P.$$

Schlussendlich folgt für $t = 0$

$$Z_0 = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{27}\} = \frac{59}{81}. \quad \frac{1}{2}P.$$

b) 1P. Nach Teilaufgabe a) gilt

$$\tau^*(\omega) = 1, \quad \omega \in \{uuu, uud, udu, udd\},$$

$$\tau^*(\omega) \in \{2, 3\}, \quad \omega \in \{duu, dud\}$$

und

$$\tau^*(\omega) = 3, \quad \omega \in \{ddu, ddd\}.$$

c) Um eine Hedging-Strategie für die erste Periode zu bestimmen, müssen wir α_0 und β_0 so bestimmen, dass

$$\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 = Z_1$$

gilt, also

$$2\alpha_0 + \beta_0 = \frac{5}{3}$$
$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \beta_0 = \frac{7}{27}. \quad 1P.$$

Die Lösung ist $\alpha_0 = \frac{76}{81}\frac{1}{2}P.$ und $\beta_0 = -\frac{17}{81}\frac{1}{2}P.$, was genau den Preis für H aus Teilaufgabe a) bestätigt: $\alpha_0 S_0 + \beta_0 B_0 = \frac{59}{81}$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Die Aussage ist korrekt. Da der Finanzmarkt arbitragefrei ist existiert ein äquivalentes Martingalmaß, da der Markt nicht vollständig ist, kann dieses aber nicht eindeutig sein. Sind aber $\mathbb{Q}_1$ und $\mathbb{Q}_2$ zwei äquivalente Martingalmaße, so ist jede Konvexkombination wieder ein äquivalentes Martingalmaß. 2P.

b) Die Aussage ist korrekt. Effiziente Portfolios können geschrieben werden als $\pi_i = g + hm_i$, wobei g, h geeignete Portfolios sind. Damit gilt aber

$$\pi = \alpha\pi_1 + (1-\alpha)\pi_2 = g + h(\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2).2P.$$

c) Die Aussage ist korrekt, Beispiel 8.3 aus dem Buch. 2P.

d) Die Aussage ist korrekt, denn für $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) = \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).2P.$$

Aufgabe 4 (4+3=7 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Wir bestimmen zunächst die Radon-Nikodym-Dichte $Z = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$. Dazu sei $\omega = u^j d^{N-j}$ ein Ereignis mit j up- und $N-j$ down-Bewegungen in beliebiger Reihenfolge. Dann gilt

$$Z(\omega) = \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} = \left(\frac{q}{p}\right)^j \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{N-j}. \quad 1P.$$

Mit $U(x) = -\frac{1}{x}$ folgen $U'(x) = \frac{1}{x^2}$ und daher $I(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Daher gilt für das optimale Endvermögen

$$X^* = I(y^*Z) = \frac{1}{\sqrt{y^*Z}}, \quad 1P.$$

wobei y^* der Lagrange-Parameter die Budgetgleichung erfüllen muss, d.h.

$$x_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X^*] = \mathbb{E}[X^*Z] = \mathbb{E}[\frac{\sqrt{Z}}{\sqrt{y^*}}] \iff \sqrt{y^*} = \frac{\mathbb{E}[\sqrt{Z}]}{x_0}.1P.$$

Insgesamt folgt also $X^* = \frac{x_0}{\mathbb{E}[\sqrt{Z}]\sqrt{Z}}$. 1P.

b) Für $N = 1$ gilt

$$Z(\omega) = \begin{cases} \frac{q}{p}, & \omega = u \\ \frac{1-q}{1-p}, & \omega = d. \end{cases} \quad 1P.$$

Die optimale Strategie $\pi^* = (\alpha, \beta)$ muss natürlich

$$\alpha S_1 + \beta B_1 = X^* \quad 1P.$$

erfüllen. Dies liefert das LGS

$$\alpha u S_0 + \beta = \frac{x_0}{\mathbb{E}[\sqrt{Z}]}\sqrt{\frac{p}{q}}$$
$$\alpha d S_0 + \beta = \frac{x_0}{\mathbb{E}[\sqrt{Z}]}\sqrt{\frac{1-p}{1-q}}.$$

Wir erhalten insgesamt

$$\alpha = \frac{x_0}{\mathbb{E}[\sqrt{Z}]}\frac{\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{1-p}{1-q}}}{S_0(u-d)}. \quad 1P.$$

Aufgabe 5 (2+2=4 Punkte)
Lösungsvorschlag:

a) Es gilt nach Definition

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X)\,\mathrm{d}\gamma. \quad 1P.$$

Es gilt außerdem

$$AVaR_\lambda(X) = \max_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X], \quad 1P.$$

wobei $\mathcal{Q}_\lambda := \{\mathbb{Q} \text{ W'maß} | \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}.\}$

b) Mit der zweiten Darstellung aus Aufgabe a) folgt die Behauptung, denn mit $\lambda_1 \leq \lambda_2$ folgt sofort $\mathcal{Q}_{\lambda_1} \supseteq \mathcal{Q}_{\lambda_2}$, womit sofort die Behauptung folgt. 2P.

Aufgabe 6 (1+5=6 Punkte)
Lösungsvorschläge:

1. Die Definition lautet

$$X \leq_{SSD} :\iff \mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \quad 1P.$$

für alle konkaven und monoton wachsenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass die Erwartungswerte existieren.

2. „$\Rightarrow$:“ Es ist offensichtlich, dass $X \leq_{cv} Y$ schon $X \leq_{SSD} Y$ impliziert. 1P.
Ferner sind $f(x) = x$ und $g(x) = -x$ konkave Funktionen, sodass folgt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[-X] \leq \mathbb{E}[-Y]$. 1P.
„$\Leftarrow$:“ Es sei f konkav.
   - Fall 1: Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\hat{f}(x) := f(x) + \alpha x$ monoton wachsend (und natürlich immernoch konkav) ist. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\mathbb{E}[\hat{f}(X)] \leq \mathbb{E}[\hat{f}(Y)] \quad \frac{1}{2}P.$$

was äquivalent ist zu

$$\mathbb{E}[f(X)] + \alpha\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[f(Y)] + \alpha\mathbb{E}[Y],$$

woraus wegen $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ die Behauptung $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$ folgt. $\frac{1}{2}$P.

- Fall 2: Es existiert kein $\alpha \in \mathbb{R}$ wie in Fall 1. Dann definieren wir

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & x \leq n \\ f(n) + f'_+(n)(x-n), & x > n. \end{cases} \quad \frac{1}{2}P.$$

Dann ist $\alpha := f'_+(n)$ ein passendes α für Fall 1, sodass $\mathbb{E}[f_n(X)] \leq \mathbb{E}[f_n(Y)]\frac{1}{2}P.$. Ferner gilt wegen der Konkavität von f offenbar $f_n \searrow f\frac{1}{2}P.$, sodass die Behauptung mit dem Satz der monotonen Konvergenz (Kann vorausgesetzt werden?) folgt. $\frac{1}{2}$P.