

Bauerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min.

Lösung: offiziell

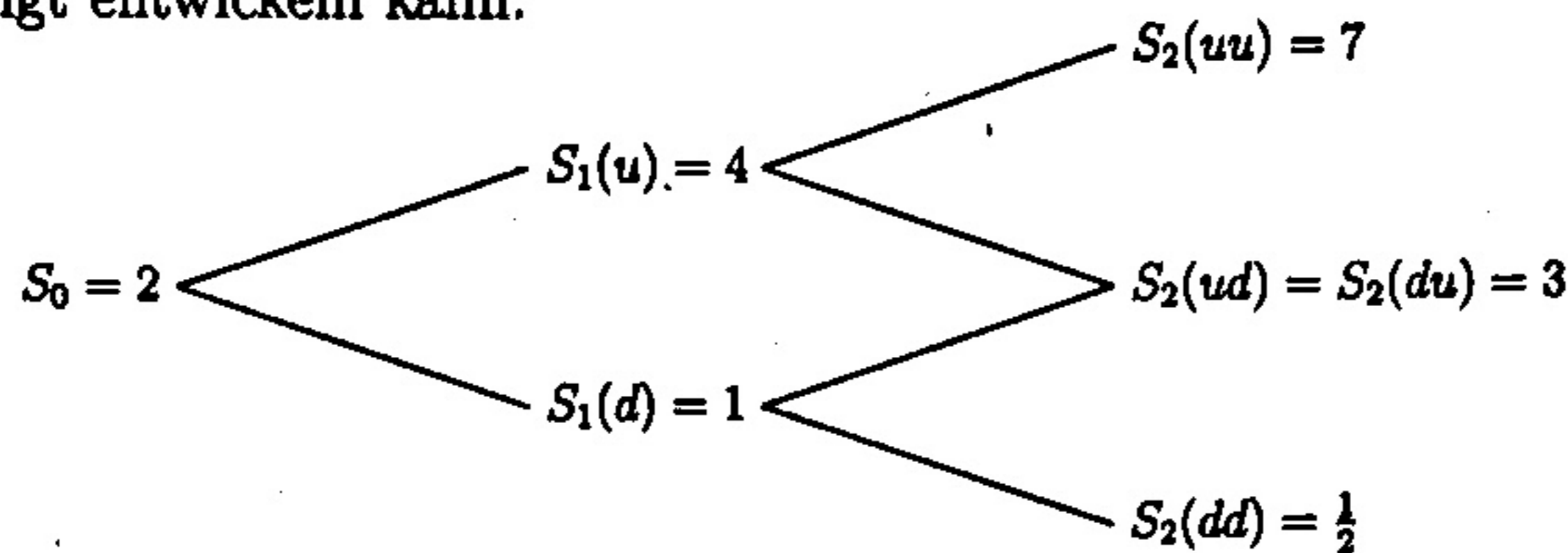
Bestanden mit:

16 P.

Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

**Aufgabe 1 (6 Punkte)**

Betrachten Sie einen zweiperiodigen endlichen Finanzmarkt mit einem risikolosen Wertpapier mit  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = (1+r)$ ,  $B_2 = (1+r)^2$ ,  $r \geq 0$  und einer risikobehafteten Anlage, die sich wie folgt entwickeln kann:



- Für welche Werte  $r \geq 0$  ist der Markt arbitragefrei?
- Es sei  $r = \frac{4}{5}$ . Finden Sie eine Arbitragestrategie.
- Der Markt sei jetzt arbitragefrei und ein europäischer Call auf die risikobehaftete Anlage mit Fälligkeit  $T = 2$  und Basispreis  $K = 6$  werde zur Zeit  $t = 0$  zum Preis  $\frac{2}{9}$  gehandelt. Welchen Wert besitzt  $r$ ?

**Aufgabe 2 (7 Punkte)**

Gegeben sei ein 3-periodiges CRR-Modell mit Parametern  $u = 2$ ,  $d = \frac{1}{2}$  und  $r = \frac{1}{2}$ . Der Anfangswert der Aktie sei  $S_0 = 8$ . Betrachten Sie einen amerikanischen Put mit Fälligkeit  $T = 3$  und Basispreis  $K = 3$ .

- Bestimmen Sie den Preis des amerikanischen Puts zur Zeit  $t = 0$ .
- Was wäre eine optimale Ausübungsstrategie?
- Wie sieht die Hedgingstrategie zum Zeitpunkt  $t = 0$  aus?

**Aufgabe 3 (6 Punkte)**

Gegeben seien zwei unkorrelierte risikobehaftete Wertpapiere auf einem einperiodigen Finanzmarkt. Die erwarteten Renditen der Wertpapiere betragen  $m_1 = \frac{1}{4}$  bzw.  $m_2 = \frac{3}{20}$  und die Standardabweichungen seien  $\sigma_1 = \frac{3}{10}$  bzw.  $\sigma_2 > 0$ .

- Das Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) in diesem Markt ist gegeben durch

$$\pi_{\text{MVP}}^* = \left( \frac{1}{10}, \frac{9}{10} \right)^T$$

Bestimmen Sie die Standardabweichung  $\sigma_2$  des zweiten Wertpapiers.

- Bestimmen Sie die minimale erreichbare Varianz.
- Dem Investor stehe nun zusätzlich eine risikolose Anlage mit einer Verzinsung von 10% zur Verfügung. Bestimmen Sie ein varianzminimales Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 20% sowie dessen Standardabweichung.

**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass das Tangentialportfolio hier durch  $\pi_{\text{Tang}}^* = \left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)^T$  gegeben ist.

#### Aufgabe 4 (9 Punkte)

Seien  $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$  und  $Y \sim N(\mu, \sigma_2^2)$  zwei Zufallsvariablen, wobei  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ .

a) Zeigen Sie, ohne das entsprechende Beispiel der Vorlesung zu zitieren:

$$X \succeq_{SSD} Y \iff \sigma_1 \leq \sigma_2.$$

**Hinweis:** Sie dürfen verwenden, dass für  $Z \sim N(0, 1)$  gilt  $\mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{\frac{t^2}{2}}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

Es seien nun  $R_1, R_2, R_3$  unabhängig und identisch  $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariablen, wobei  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ . Die Zufallsvariablen beschreiben die Renditen von drei risikobehafteten Wertpapieren. Eine Bank bietet drei Portfolios an mit folgenden Portfoliogewichten der drei Wertpapiere:

Portfolio A:  $\pi_A = (0, 1, 0)^\top$

Portfolio B:  $\pi_B = \left(0, \frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)^\top$

Portfolio C:  $\pi_C = \left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right)^\top$

- b) Können Sie die drei Portfoliorenditen im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung vergleichen? Wenn ja, wie sind sie geordnet?
- c) Wie würde ein Investor, dessen Präferenzrelation durch die stochastische Dominanz zweiter Ordnung gegeben ist, ein Portfolio aus den drei Wertpapieren zusammensetzen?
- d) Die Wertpapiere 1 und 2 seien jetzt korreliert mit  $\rho = -\frac{1}{10}$ , jedoch weiterhin stochastisch unabhängig von Wertpapier 3. Wie ändern sich die Varianzen der Portfolios A, B und C?

#### Aufgabe 5 (7 Punkte)

Sei  $\rho : L^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ein kohärentes Risikomaß.

a) Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\| := \rho(-|\cdot|)$  eine Halbnorm auf  $L^1$  definiert.

**Hinweis:** Eine Halbnorm erfüllt die Normeigenschaften absolute Homogenität und Dreiecksungleichung, jedoch nicht notwendigerweise Definitheit.

b) Zeigen Sie, dass  $\rho$  Lipschitz-stetig bezüglich  $\|\cdot\|$  ist.

c) Geben Sie ein Beispiel für ein kohärentes Risikomaß an (ohne Begründung).

#### Aufgabe 6 (5 Punkte)

Geben Sie auf die folgenden Fragen eine Antwort und begründen Sie diese kurz.

a) Gibt es ein CRR-Modell mit Parametern  $u, d, r$ , das arbitragefrei aber nicht vollständig ist?

b) Auf einem endlichen Finanzmarkt mit risikolosem Wertpapier  $B$  seien ein europäischer Put und ein europäischer Call auf die selbe Aktie  $S$  mit demselben Basispreis  $K \geq 0$  und derselben Fälligkeit  $T \in \mathbb{N}$  gegeben. Wann ist der Preis des Puts  $P_t$  größer als Preis des Calls  $C_t$  zur Zeit  $0 \leq t \leq T$ ? Finden Sie eine Bedingung an  $K$  und den aktuellen Aktienpreis  $S_t$ .

c) Eignen sich folgende Funktionen als Nutzenfunktionen auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich?

(i)  $U(x) = \log(x)$ ,  $x > 0$

(ii)  $U(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$

(iii)  $U(x) = e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

d) Ist auf einem  $T$ -periodigen, endlichen, arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt der Preis eines amerikanischen Calls immer echt größer als Preis des entsprechenden europäischen Calls, d.h. gilt für  $H = ((S_t - K)^+)_{0 \leq t \leq T}$

$$\pi^E(H) < \pi^A(H)?$$

e) Ist die Standardabweichung ein monetäres Risikomaß auf  $L^2$ ?

**Aufgabe 1**

**Lösungsvorschlag: (1.5+2+2.5 = 6 Punkte)**

a) Hier liegt CRR-Modell mit zustandsabhängigen Faktoren  $r, u_0, d_0, u_1(\cdot), d_1(\cdot)$  vor. Für Arbitragefreiheit muss demnach gelten:

$$(i) \quad \frac{1}{2} = d < 1 + r < u = 2 \iff -\frac{1}{2} < r < 1$$

$$(ii) \quad \frac{3}{4} = d_1(u) < 1 + r < u_1(u) = \frac{7}{4} \iff -\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2} = d_1(d) < 1 + r < u_1(d) = 3 \iff -\frac{1}{2} < r < 2$$

D.h. der Markt ist für  $0 \leq r < \frac{3}{4}$  arbitragefrei.

b) Definiere die  $\mathcal{F}_1$ -messbare Zufallsvariable  $\eta := -\mathbf{1}_{\{(u,u),(u,d)\}}$ . Wegen

$$\eta(\tilde{S}_2(\omega) - \tilde{S}_1(\omega)) = \begin{cases} -\left(\frac{7}{1.8^2} - \frac{4}{1.8}\right) > 0, & \omega = (u, u) \\ -\left(\frac{3}{1.8^2} - \frac{4}{1.8}\right) > 0, & \omega = (u, d) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist  $\varphi = (\alpha, \beta)$  mit  $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \eta, \beta_0 = 0$  und  $\beta_1 = -\frac{4}{1+r}\eta$  nach dem Satz über lokale Arbitrage (Theorem 2.1) eine Arbitragestrategie. Der Wert von  $\beta_1$  ergibt sich dabei aus den Selbstfinanzierungsbedingungen

$$0 = V_1^\varphi(u) = \beta_1(u)B_1 + \alpha_1(u)S_1(u) = \beta_1(u)(1+r) - 4$$

und  $0 = V_1^\varphi(d) = \beta_1(d)B_1 + \alpha_1(d)S_1(d) = \beta_1(d)(1+r) + 0.$

c) Das eindeutige äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  ist charakterisiert durch die Parameter

$$q_0 = \frac{1+r-d_0}{u_0-d_0} = \frac{1+r-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3},$$

$$q_1(u) = \frac{1+r-d_1(u)}{u_1(u)-d_1(u)} = \frac{1+r-\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = r + \frac{1}{4},$$

$$q_1(d) = \frac{1+r-d_1(d)}{u_1(d)-d_1(d)} = \frac{1+r-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}r + \frac{1}{5}.$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel folgt

$$\frac{2}{9} = \pi(H) \stackrel{!}{=} \frac{1}{(1+r)^2} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - 6)^+] = \frac{1}{(1+r)^2} \left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}\right) \left(r + \frac{1}{4}\right)$$

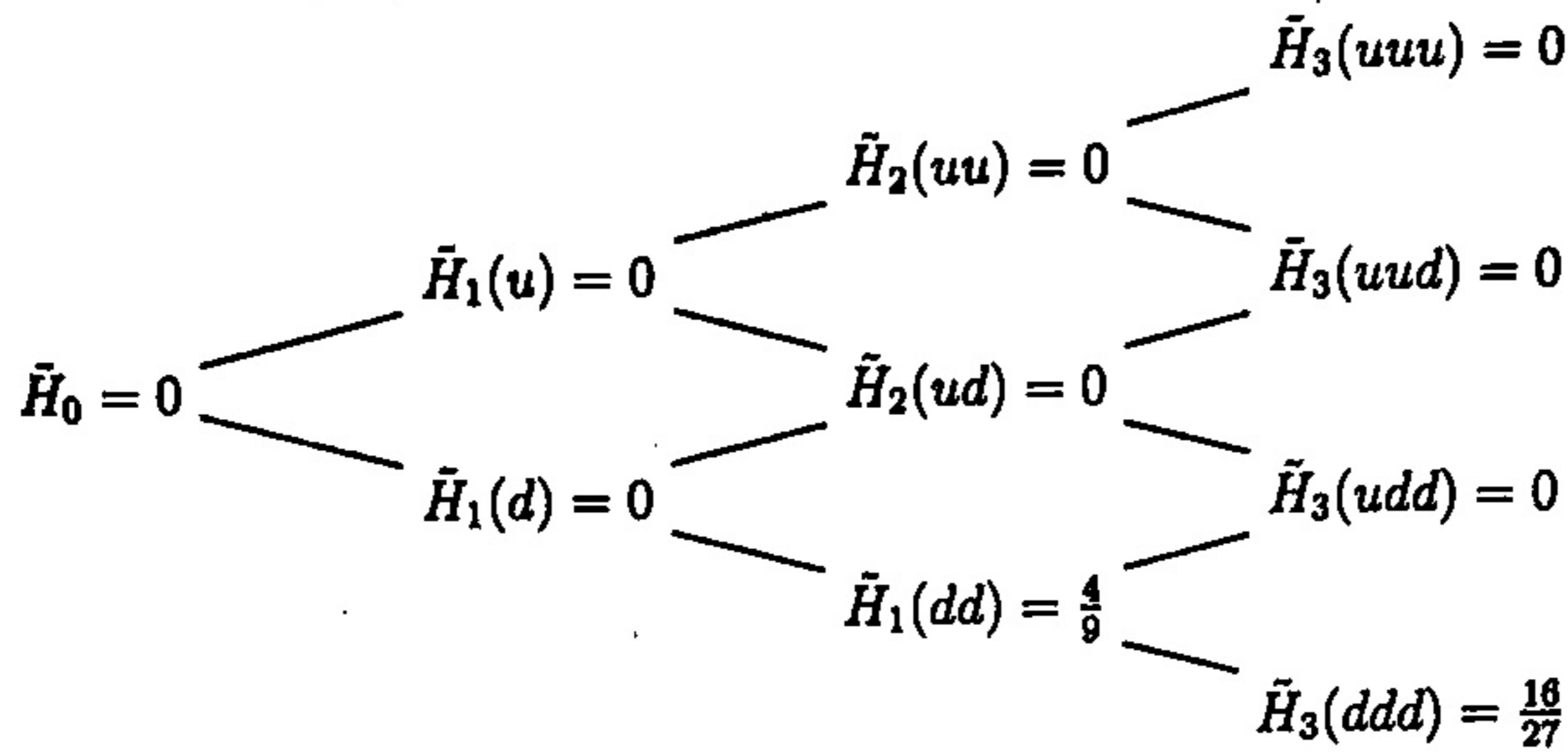
$$\iff \frac{4}{9}r^2 + \frac{1}{18}r - \frac{5}{36} = 0$$

$$\stackrel{r \geq 0}{\implies} r = \frac{1}{2}.$$

**Aufgabe 2**

**Lösungsvorschlag: (4+1+2 = 7 Punkte)**

a) Der CRR-Finanzmarkt ist arbitragefrei und vollständig, da  $d < 1 + r < u$ . Das eindeutige äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  ist bestimmt durch den Parameter  $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ . Der diskontierte Auszahlungsprozess  $\tilde{H}_t = \frac{1}{(1+r)^t} (K - S_t), t = 0, \dots, 3$ , des amerikanischen Calls ist rekombinierend und gegeben durch



Für die Snell-Einhüllende  $(Z_t)_{t=0, \dots, 3}$  ergibt sich

$$Z_3(uuu) = Z_3(uud) = Z_3(udd) = 0, \quad Z_3(ddd) = \frac{16}{27},$$

$$Z_2(uu) = \max\{\tilde{H}_2(uu), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_3|\mathcal{F}_2](uu)\} = 0,$$

$$Z_2(ud) = \max\{\tilde{H}_2(ud), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_3|\mathcal{F}_2](ud)\} = 0,$$

$$Z_2(dd) = \max\{\tilde{H}_2(dd), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_3|\mathcal{F}_2](dd)\} = \max\left\{\frac{4}{9}, \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{27}\right\} = \frac{4}{9},$$

$$Z_1(u) = \max\{\tilde{H}_1(u), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](u)\} = 0,$$

$$Z_1(d) = \max\{\tilde{H}_1(d), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](d)\} = \max\left\{0, \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right\} = \frac{4}{27},$$

$$Z_0 = \max\{\tilde{H}_0, \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_1]\} = \max\left\{0, \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{27}\right\} = \frac{4}{81}.$$

Damit beträgt der Preis des amerikanischen Puts  $\pi^A(H) = Z_0 = \frac{4}{81}$ .

b) Eine optimale Ausübungsstrategie  $\tau^*$  ist gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \inf\{t \geq 0 : Z_t = \tilde{H}_t\} = \begin{cases} 1, & \omega \in \{(u, u, u), (u, u, d), (u, d, u), (u, d, d)\} \\ 2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

c) Wegen  $\tau^* \geq 1$  gilt für die Hedging-Strategie  $\varphi$ :

$$V_1^\varphi = B_1 Z_1, \quad \text{d.h. } V_1^\varphi(u) = 0 \text{ und } V_1^\varphi(d) = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{27} = \frac{2}{9}.$$

Dies führt auf das LGS

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= 0 & \iff & 16\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = 0 & \iff & 16\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = 0 \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= \frac{2}{9} & \iff & 4\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{2}{9} & \iff & -12\alpha_0 = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

mit der eindeutigen Lösung  $\varphi_0 = (\alpha_0, \beta_0) = (-1/54, 16/81)$ .

### Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: (2.5+0.5+3 = 6 Punkte)

a) Die Kovarianzmatrix der Renditen ist

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \left(\frac{3}{10}\right)^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{und folglich} \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{10}{3}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Es gilt} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix} = \pi_{\text{MVP}}^* = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e = \frac{1}{C} \begin{pmatrix} \left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Zeile folgt  $C = 10 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{1000}{9}$  und durch Einsetzen in die zweite

$$\text{Zeile } \sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{C} \cdot \frac{10}{9}} = \sqrt{\frac{9}{1000} \cdot \frac{10}{9}} = \frac{1}{10}.$$

b) Die minimale erreichbare Varianz ist

$$\text{Var}(R^{\pi^*_{MVP}}) = \frac{1}{C} = \frac{9}{1000}.$$

c) Bei zusätzlicher Verfügbarkeit einer risikolosen Anlage liegen die varianzminimalen Portfolios auf der Kapitalmarktklinie, d.h.

$$\begin{aligned} 0,2 &\stackrel{!}{=} \mathbb{E}[\alpha R^{\pi^*_{Tang}} + (1-\alpha)R^0] \\ &= \alpha \pi^*_{Tang} \cdot m + (1-\alpha)R^0 \\ &= \alpha \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{20} \right) + (1-\alpha) \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{40} \alpha + \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow \alpha &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Das optimale Portfolio ist mithin

$$\pi^* = (\pi_0^*, \pi_1^*, \pi_2^*) = (1-\alpha, \alpha \pi^*_{Tang,1}, \alpha \pi^*_{Tang,2}) = \left( -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right).$$

Es hat die Standardabweichung

$$\sigma_{Tobin} = |\alpha| \sqrt{\pi^*_{Tang}{}^T \Sigma \pi^*_{Tang}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{1}{5\sqrt{2}}.$$

#### Aufgabe 4 (9 Punkte)

Lösungsvorschlag: (4+1.5+2.5+1 = 9 Punkte)

a) Es gilt:  $X \succeq_{SSD} Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[U(X)] \geq \mathbb{E}[U(Y)]$  für alle Nutzenfunktionen  $U$ .

„ $\Rightarrow$ “.  $X \sim N(\mu, \sigma_1^2)$  und  $Y \sim N(\mu, \sigma_2^2)$  haben die gleiche Verteilung wie  $\mu + \sigma_1 Z$  bzw.  $\mu + \sigma_2 Z$  für  $Z \sim N(0, 1)$ . Die Abbildung  $t \mapsto -e^{-t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist wachsend konkav und damit eine Nutzenfunktion. Mit dem Hinweis folgt

$$-e^{-\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}} = -\mathbb{E}[e^{-\mu - \sigma_1 Z}] = -\mathbb{E}[e^{-X}] \geq -\mathbb{E}[e^{-Y}] = -\mathbb{E}[e^{-\mu - \sigma_2 Z}] = -e^{-\mu + \frac{\sigma_2^2}{2}}$$

und durch Logarithmieren  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ .

„ $\Leftarrow$ “. Sei  $U$  eine beliebige Nutzenfunktion. Weiter sei  $Z \sim N(0, \sigma_2^2 - \sigma_1^2)$  unabhängig von  $X$ . Nach dem Additionsgesetz der Normalverteilung gilt  $Y \sim X + Z$ . O.B.d.A. sei  $Y = X + Z$  ( $\succeq_{SSD}$  ist verteilungsinvariant). Mit der Jensen-Ungleichung für bedingte Erwartungswerte folgt

$$\mathbb{E}[U(Y)|X] = \mathbb{E}[U(X + Z)|X] \leq U(\mathbb{E}[X + Z|X]) = U(X).$$

Durch Erwartungswertbildung auf beiden Seiten ergibt sich  $X \succeq_{SSD} Y$ .

b) Wegen der Unabhängigkeit der Renditen der einzelnen Wertpapiere folgt mit dem Additionsgesetz der Normalverteilung für die Portfoliorenditen

$$\begin{aligned} R_A &\sim N(\mu, \sigma^2) \\ R_B &\sim N\left(\mu, \left(\frac{7^2}{10^2} + \frac{3^2}{10^2}\right) \sigma^2\right) = N\left(\mu, \frac{29}{50} \sigma^2\right) \\ R_C &\sim N\left(\mu, \left(\frac{2^2}{10^2} + \frac{3^2}{10^2} + \frac{5^2}{10^2}\right) \sigma^2\right) = N\left(\mu, \frac{19}{50} \sigma^2\right) \end{aligned}$$

Teil a) impliziert also  $R^{\pi_C} \succeq_{SSD} R^{\pi_B} \succeq_{SSD} R^{\pi_A}$ .

- c) Jedes solche Portfolio ist normalverteilt und hat Erwartungswert  $\mu$ . Nach Teil a) würde der Investor sein Portfolio  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$  mit  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$  varianzminimierend wählen, d.h.

$$\min \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 \quad \text{s.t. } \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \quad (1)$$

Aus der Konvexität der Funktion  $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$  folgt für  $(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \in \mathbb{R}^3$  mit  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ , dass

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3}{3}\right)^2 \leq \frac{\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2}{3}.$$

Hier gilt Gleichheit für  $\pi^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , was somit ein optimales Portfolio ist.

*Alternative Begründung:* Löse (1) mit dem Lagrange-Ansatz.

- d) Für die Portfolios A und B gibt es offensichtlich keine Änderung. Die neue Varianz von Portfolio C ist

$$\left(\frac{2^2}{10^2} + \frac{3^2}{10^2} + \frac{5^2}{10^2} - 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10}\right) \sigma^2 = \frac{46}{125} \sigma^2,$$

d.h. die Varianz verringert sich um  $\frac{3}{250} \sigma^2$ .

## Aufgabe 5

**Lösungsvorschlag: (2.5+4+0.5 = 7 Punkte)**

- a) Sei  $X \in L^1$ . Wegen  $-|X| \leq 0$  folgt aus Monotonie und Normiertheit von  $\rho$ , dass  $\|X\| = \rho(-|X|) \geq \rho(0) = 0$ , d.h.  $\|\cdot\| : L^1 \rightarrow [0, \infty)$ . Weiterhin gilt

- aufgrund der positiven Homogenität von  $\rho$ :

$$\|\lambda X\| = \rho(-|\lambda X|) = \rho(-|\lambda| \cdot |X|) = |\lambda| \cdot \rho(-|X|) = |\lambda| \cdot \|X\|$$

für alle  $X \in L^1$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  (absolute Homogenität).

- aufgrund der Dreiecksungleichung des Betrages sowie der Monotonie und Subadditivität von  $\rho$ :

$$\|X + Y\| = \rho(-|X + Y|) \leq \rho(-|X| - |Y|) \leq \rho(-|X|) + \rho(-|Y|) = \|X\| + \|Y\|$$

für alle  $X, Y \in L^1$  (Dreiecksungleichung).

Also ist  $\|\cdot\| : L^1 \rightarrow [0, \infty)$  eine Halbnorm.

- b) Seien  $X, Y \in L^1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \rho(Y + (X - Y)) \\ &\leq \rho(Y) + \rho(X - Y) \\ &\leq \rho(Y) + \rho(-|X - Y|) \\ &= \rho(Y) + \|X - Y\| \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung aus der Subadditivität und die zweite aus der Monotonie von  $\rho$  folgt. Dies ist äquivalent zu

$$\rho(X) - \rho(Y) \leq \|X - Y\|.$$

Durch Vertauschung von  $X$  und  $Y$  ergibt sich

$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|,$$

d.h.  $\rho$  ist Lipschitz-stetig bezüglich  $\|\cdot\|$  mit Lipschitzkonstante  $L = 1$ .

- c)  $\rho(X) := -\mathbb{E}[X]$ ,  $X \in L^1$ .

## Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: (0.5+1+1.5+1+1 = 5 Punkte)

a) Nein. Im CRR-Modell gilt

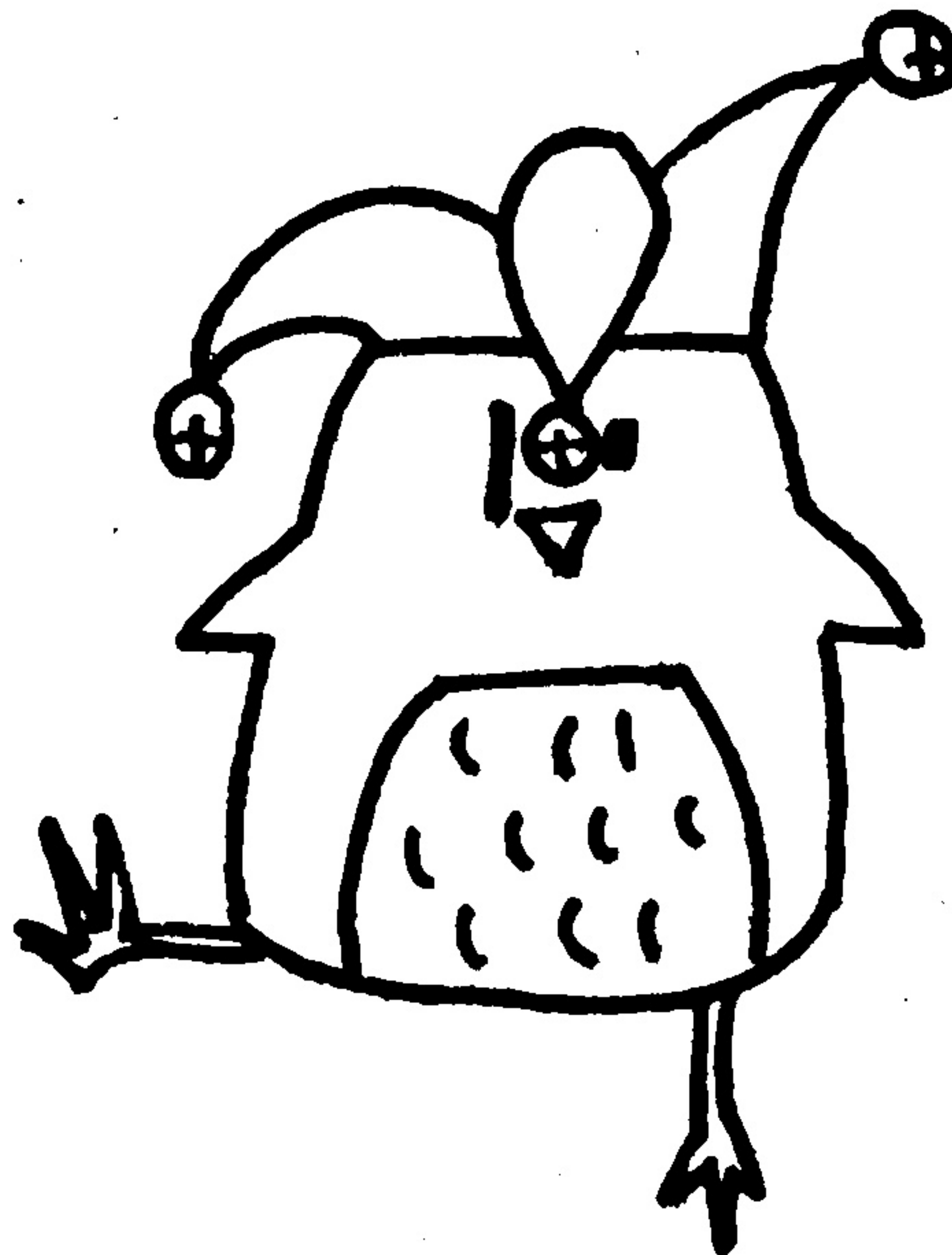
$$\text{vollständig} \iff (\text{NA}) \iff d < 1 + r < u.$$

b) Es gilt die Put-Call-Parität

$$P_t - C_t = K \frac{B_t}{B_T} - S_t,$$

d.h. die Bedingung lautet  $K \frac{B_t}{B_T} \geq S_t$ .

- c) (i) Ja, denn  $U(x) = \log(x)$ ,  $x > 0$ , ist streng wachsend, streng konkav und stetig.  
(ii) Ja, denn  $U(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ , ist streng wachsend, streng konkav und stetig.  
(iii) Nein, denn  $U(x) = e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ist streng fallend.
- d) Nein, die Preise sind sogar gleich. Denn der diskontierte Auszahlungsprozess des amerikanischen Calls ist ein Submartingal und die optimale Ausübungsstrategie ist daher  $\tau^* = T$  (vgl. Beispiel 7.3).
- e) Nein, denn wegen  $\sigma(X + m) = \sigma(X)$  für alle  $X \in L^2$  und  $m \in \mathbb{R}$  ist die Standardabweichung nicht translationsinvariant.



Viel Erfolg!