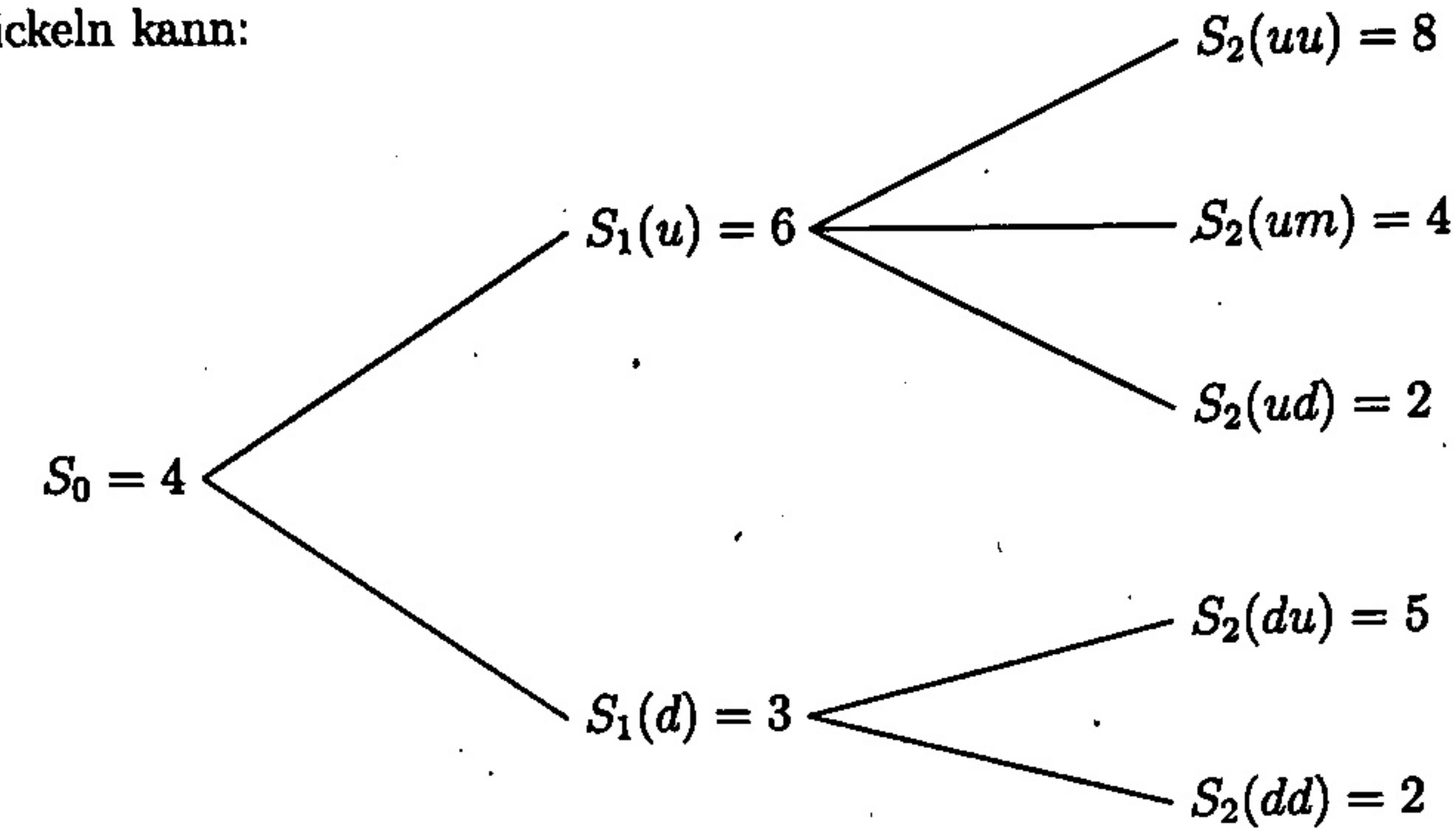
# Bäuerle

# Finanzmathematik in diskreter Zeit - Nach

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.
Nachklausur, Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Betrachten Sie einen zweiperiodigen endlichen Finanzmarkt mit einem normierten risikolosen Wertpapier mit Zinssatz $r = 0.25$ und einer risikobehafteten Anlage, die sich wie folgt entwickeln kann:




a) Ist der Markt arbitragefrei?

b) Ist der Preis einer europäischen Call-Option mit Basispreis $K = 3$ eindeutig bestimmt? Falls ja, geben Sie den Preis an und anderenfalls ein Preisintervall. Ist der Zahlungsanspruch erreichbar?

c) Geben Sie einen nichtdeterministischen Zahlungsanspruch an, dessen Preis unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich ist.

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei ein 3-periodiges CRR-Modell mit Parametern $u = \frac{4}{3}$, $d = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{1}{5}$. Der Anfangswert des risikobehafteten Wertpapiers sei $S_0 = 27$. Betrachten Sie einen amerikanischen Put mit Fälligkeit $T = 3$ und Basispreis $K = 25$.

a) Bestimmen Sie den Auszahlungsprozess.

b) Bestimmen Sie den Preis zur Zeit $t = 0$.

c) Was wäre eine optimale Ausübungsstrategie?

d) Wie sieht die Hedgingstrategie zum Zeitpunkt $t = 0$ aus?

## Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Definieren Sie $X \succeq_{SSD} Y$ für zwei Zufallsvariablen $X$ und $Y$.

b) Seien $X_1, \dots, X_n$ identisch verteilte, aber nicht notwendigerweise unabhängige Zufallsvariablen, wobei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \succeq_{SSD} nX_1.$$

## Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein 2-periodiger CRR-Finanzmarkt mit Parametern $u = \frac{4}{3}$, $d = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{1}{6}$. Der Anfangswert des risikobehafteten Wertpapiers sei $S_0 = 18$. $\mathbb{P}$ sei die Gleichverteilung auf $\Omega = \{(u,u),(u,d),(d,u),(d,d)\}$. Die Präferenzen eines Investors seien durch die Nutzenfunktion

$$U : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad U(x) = \sqrt{x}$$

repräsentiert.

a) Zeigen Sie, dass $U$ der Inada-Bedingung genügt.

b) Der Investor möchte den erwarteten Nutzen, welchen er aus seinem Endvermögen zur Zeit $T = 2$ zieht, maximieren. Bestimmen Sie das optimale Endvermögen bei gegebenem Anfangsvermögen $x_0 > 0$.

## Aufgabe 5 (7 Punkte)

Sei $\gamma > 0$ und $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ mit

$$\rho(X) = \frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]\right).$$

a) Zeigen Sie, dass $-\rho(X)$ dem Sicherheitsäquivalent von $X \in L^1$ unter einer exponentiellen Nutzenfunktion $U(x) = -e^{-\gamma x}$, $x \in \mathbb{R}$, entspricht.

b) Zeigen Sie, dass $\rho$ ein monetäres Risikomaß ist.

c) Zeigen Sie, dass $\rho$ quasikonvex ist, d.h. dass für $X, Y \in L^1$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho\big(\lambda X + (1-\lambda)Y\big) \leq \max\{\rho(X), \rho(Y)\}.$$

## Aufgabe 6 (6 Punkte)

Geben Sie auf die folgenden Fragen eine Antwort und **begründen** Sie diese kurz.

a) Eine selbstfinanzierende Handelsstrategie $\varphi$ auf einem endlichen Finanzmarkt heißt *Arbitragestrategie*, falls gilt

$$V_0^\varphi = 0, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq 0) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi > 0) > 0. \tag{1}$$

Kann man statt dem Anfangswert 0 auch einen beliebigen anderen Wert $c > 0$ wählen? Ist also (1) äquivalent zu

$$V_0^\varphi = c, \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi \geq c) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(V_T^\varphi > c) > 0? \tag{2}$$

b) $\mathcal{M}^*$ sei die Menge der äquivalenten Martingalmaße auf einem endlichen Finanzmarkt. Welche Werte kann die Kardinalität $|\mathcal{M}^*|$ annehmen?

c) Eine Investorin mit streng wachsender, streng konkaver Nutzenfunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hat die Auswahl zwischen einer unsicheren Auszahlung $X \in L^1$ und der sicheren Auszahlung $\mathbb{E}[X]$. Welche präferiert sie?

d) Gilt für $X, Y \in L^2$ die Implikation

$$X \succeq_{SSD} Y \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)?$$

**Aufgabe 1**
**Lösungsvorschlag: (4+2.5+1.5 = 8 Punkte)**

a) Wir bestimmen die Menge $\mathcal{M}^*$ der äquivalenten Martingalmaße.

- Für $t = 1$ muss im oberen Teilbaum gelten:

$$\frac{6}{1.25} = \frac{S_1(u)}{B_1} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_2}{B_2}|\mathcal{F}_1\right](u) = \frac{1}{1.25^2}(8q(u|u) + 4q(m|u) + 2q(d|u))$$
$$\Longleftrightarrow \frac{15}{2} = 8q(u|u) + 4q(m|u) + 2q(d|u)$$

Setze $p := q(u|u)$. Durch Subtraktion des Zweifachen der Gleichung $1 = q(u|u)+ q(m|u) + q(d|u)$ ergibt sich

$$q(m|u) = \frac{\frac{11}{2} - 6p}{2} = \frac{11}{4} - 3p \qquad \text{und} \qquad q(d|u) = 1 - p - \frac{11}{4} + 3p = -\frac{7}{4} + 2p$$

Da $q(\cdot|u) \in (0,1)$ erhält man schließlich

$$(q(u|u), q(m|u), q(d|u)) \in \left\{\left(p, \frac{11}{4} - 3p, -\frac{7}{4} + 2p\right) : p \in \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12}\right)\right\}.$$

- Für $t = 1$ ist der untere Teilbaum ein einperiodiges CRR-Modell und mithin ist

$$q(u|d) = \frac{1 + r - \frac{S_2(dd)}{S_1(d)}}{\frac{S_2(du)}{S_1(d)} - \frac{S_2(dd)}{S_1(d)}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{7}{12}.$$

- Analog folgt für $t = 0$

$$q = \frac{1 + r - \frac{S_1(d)}{S_0}}{\frac{S_1(u)}{S_0} - \frac{S_1(d)}{S_0}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Insgesamt erhält man

$$\mathcal{M}^* = \left\{\left(\frac{2}{3}p, \frac{11}{6} - 2p, -\frac{7}{6} + \frac{4}{3}p, \frac{7}{36}, \frac{5}{36}\right) : p \in \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12}\right)\right\}$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ und der Markt nach dem Ersten Hauptsatz der Preistheorie arbitragefrei.

b) Sei $H := (S_2 - 3)^+$. Es gilt

$$\pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \frac{16}{25} \sup_{p\in(\frac{7}{8},\frac{11}{12})}\left(\frac{10}{3}p + \frac{11}{6} - 2p + \frac{14}{36}\right)$$
$$= \frac{16}{25}\cdot\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{11}{12} + \frac{11}{6} - 2\cdot\frac{11}{12} + \frac{14}{36}\right) = \frac{496}{225} \approx 2.20\ .$$
$$\pi_-(H) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \frac{16}{25} \inf_{p\in(\frac{7}{8},\frac{11}{12})}\left(\frac{10}{3}p + \frac{11}{6} - 2p + \frac{14}{36}\right)$$
$$= \frac{16}{25}\cdot\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{7}{8} + \frac{11}{6} - 2\cdot\frac{7}{8} + \frac{14}{36}\right) = \frac{448}{225} \approx 2.17\ .$$

Der Preis ist nicht eindeutig bestimmt, sondern liegt im Intervall $(\pi_-(H), \pi_+(H))$. Der Zahlungsanspruch ist folglich nicht erreichbar.

c) Unabhängigkeit des Preises von der Wahl des äquivalenten Martingalmaßes ist äquivalent zur Erreichbarkeit. Wähle also zum Beispiel $H = S_2$.

**Aufgabe 2**

**Lösungsvorschlag: (1+4.5+1+1.5 = 8 Punkte)**

a) Der Auszahlungsprozess $H_t = (25 - S_t) =: h(S_t)$, $t = 0, \dots, 3$, folgt

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=tiny]
 & & & H_3(uuu) = 0 \\
 & & H_2(uu) = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & H_1(u) = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_3(uud) = 0 \\
H_0 = 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_2(ud) = 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & H_1(d) = 7 \arrow[ur] \arrow[dr] & & H_3(udd) = 9 \\
 & & H_1(dd) = 13 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & H_3(ddd) = 17
\end{tikzcd}
$$

b) Wegen $d < 1 + r < u$ ist der CRR-Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig mit $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{4}{5}$. Da $H_t = h(S_t)$, kann der Preisalgorithmus

$$
\begin{aligned}
&p_3(S_3) = h(S_3),\\
&p_t(S_t) = \max\left\{h(S_t), (1+r)^{-1}\left(qp_{t+1}(S_t u) + (1-q)p_{t+1}(S_t d)\right)\right\}, \quad t = 0, 1, 2,
\end{aligned}
$$

verwendet werden. Es folgt

$$
\begin{aligned}
p_3(S_3(uuu)) = 0, \quad p_3(S_3(uud)) &= 0, \quad p_3(S_3(udd)) = 9, \quad p_3(S_3(ddd)) = 17,\\
p_2(S_2(uu)) &= \max\left\{0, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 0\right)\right\} = \max\{0, 0\} = 0,\\
p_2(S_2(ud)) &= \max\left\{1, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 9\right)\right\} = \max\left\{1, \frac{3}{2}\right\} = \frac{3}{2},\\
p_2(S_2(dd)) &= \max\left\{13, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot 9 + \frac{1}{5}\cdot 17\right)\right\} = \max\left\{13, \frac{53}{6}\right\} = 13,\\
p_1(S_1(u)) &= \max\left\{0, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot \frac{3}{2}\right)\right\} = \max\left\{0, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4},\\
p_1(S_1(d)) &= \max\left\{7, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{5}\cdot 13\right)\right\} = \max\left\{7, \frac{19}{6}\right\} = 7,\\
p_0(S_0) &= \max\left\{0, \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\cdot 7\right)\right\} = \max\left\{0, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

c) Eine optimale Ausübungsstrategie ist gegeben durch

$$
\tau^*(\omega) = \inf\{t \geq 0 : p_t(S_t(\omega)) = h(S_t(\omega))\} = \begin{cases} 3, & \omega \in \{(u,d,u), (u,d,d)\},\\ 2, & \omega \in \{(u,u,u), (u,u,d)\},\\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}
$$

d) Wegen $\tau^* \geq 1$ gilt für die Hedgingstrategie $V_1^\varphi = p_1(S_1)$, d.h. $\varphi_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ erfüllt

$$
\begin{aligned}
\alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= p_1(S_1(u))\\
\alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= p_1(S_1(d))
\end{aligned}
\iff
\begin{aligned}
36\alpha_0 + \frac{6}{5}\beta_0 &= \frac{1}{4}\\
18\alpha_0 + \frac{6}{5}\beta_0 &= 7
\end{aligned}
\iff \varphi_0 = \left(-\frac{3}{8}, \frac{275}{24}\right).
$$

**Aufgabe 3**
**Lösungsvorschlag: (1+4 = 5 Punkte)**

a) $X \succeq_{SSD} Y :\Longleftrightarrow \mathbb{E}[U(X)] \geq \mathbb{E}[U(Y)]$ für alle Nutzenfunktionen $U$, für die die Erwartungswerte existieren.

b) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \succeq_{SSD} nX_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \succeq_{SSD} X_1,$$

da $U(\cdot)$ genau dann eine Nutzenfunktion (d.h. stetig, streng wachsend und streng konkav) ist, wenn $U(\frac{1}{n}\cdot)$ eine Nutzenfunktion ist. Aus der Konkavität der Nutzenfunktion, der Linearität des Erwartungswertes und $X_i \sim X_1$, $i = 1, \dots, n$, folgt

$$\mathbb{E}\left[U\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[U(X_i)] = \mathbb{E}[U(X_1)]$$

für jede Nutzenfunktion $U$, für die die Erwartungswerte existierten. Somit gilt die Behauptung.

**Aufgabe 4**
**Lösungsvorschlag: (1.5+4.5 = 6 Punkte)**

a) Es gilt $U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, d.h. $U' \in C^1(0,\infty)$. Ferner

$$\lim_{x\to 0} U'(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} U'(x) = 0.$$

Somit ist die Inada-Bedingung erfüllt.

b) Wir verwenden die Martingalmethode. Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist durch den Parameter $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{3}{4}$ charakterisiert. Der entsprechende Parameter von $\mathbb{P}$ ist $p = \frac{1}{2}$. Weiter ist $B_2 = (1+r)^2 = \frac{49}{36}$. Die state price density $Z = \frac{\mathbb{Q}}{B_2\mathbb{P}}$ ist gegeben durch

$$Z(uu) = \frac{q^2}{B_2 p^2} = \frac{81}{49}, \qquad Z(ud) = \frac{q(1-q)}{B_2 p^2} = \frac{27}{49},$$
$$Z(du) = \frac{q(1-q)}{B_2 p^2} = \frac{27}{49}, \qquad Z(dd) = \frac{(1-q)^2}{B_2 p^2} = \frac{9}{49}.$$

Die Umkehrfunktion von $U'$ ist $I : (0,\infty) \to (0,\infty)$, $I(y) = \frac{1}{(2y)^2}$. Nach der Vorlesung ist das optimale Endvermögen

$$X^* = I(y^* Z) = \frac{1}{(2y^* Z)^2}.$$

Der Multiplikator $y^*$ ist durch die Nebenbedingung

$$x_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X^*}{B_2}\right] = \mathbb{E}\left[X^* Z\right] = \frac{1}{(2y^*)^2}\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z}\right] = \frac{1}{(2y^*)^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{49}{81}+\frac{49}{27}+\frac{49}{27}+\frac{49}{9}\right)$$
$$= \frac{1}{(2y^*)^2}\cdot\frac{196}{81}$$

bestimmt. Folglich ist

$$X^* = \frac{81x_0}{196Z^2}.$$

**Aufgabe 5**
**Lösungsvorschlag: (1+2+4 = 7 Punkte)**

a) Es gilt $U^{-1}(y) = -\frac{1}{\gamma}\log(-y)$, $y < 0$, und damit

$$c(X) = U^{-1}(\mathbb{E}[U(X)]) = -\frac{1}{\gamma}\log\left(-\mathbb{E}\left[-e^{-\gamma X}\right]\right) = -\frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]\right) = -\rho(X).$$

b) *Monotonie:* Seien $X, Y \in L^1$ mit $X \leq Y$. Folglich ist $e^{-\gamma X} \geq e^{-\gamma Y}$ und mit der Monotonie des Erwartungswertes $\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right] \geq \mathbb{E}\left[e^{-\gamma Y}\right]$. Die Funktion $x \mapsto \frac{1}{\gamma}\log(x)$ ist monoton wachsend auf $(0,\infty)$ und daher

$$\rho(X) = \frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]\right) \geq \frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma Y}\right]\right) = \rho(Y).$$

*Translationsinvarianz:* Seien $X \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\rho(X+m) &= \frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma(X+m)}\right]\right) = \frac{1}{\gamma}\log\left(e^{-\gamma m}\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]\right)\\ &= \frac{1}{\gamma}\log\left(\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]\right) - m = \rho(X) - m.\end{aligned}$$

c) Die Konvexität der Exponentialfunktion und die Linearität des Erwartungswertes implizieren für $X, Y \in L^1$ und $\lambda \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\gamma\left(\lambda X+(1-\lambda)Y\right)}\right] &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda\gamma X+(1-\lambda)\gamma Y}\right]\\ &\leq \lambda\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right] + (1-\lambda)\mathbb{E}\left[e^{-\gamma Y}\right]\\ &\leq \max\left\{\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right], \mathbb{E}\left[e^{-\gamma Y}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Anwendung der monotonen Transformation $\frac{1}{\gamma}\log(\cdot)$ auf beiden Seiten liefert

$$\rho\left(\lambda X + (1-\lambda)Y\right) \leq \max\{\rho(X), \rho(Y)\}.$$

**Aufgabe 6 (6 Punkte)**
**Lösungsvorschlag: (1.5+1.5+1+2 = 6 Punkte)**

a) Nein. Betrachte beispielsweise einen CRR-Finanzmarkt mit $T = 1$, $d < 1 + r < u$ und $r > 0$. Dann gibt es keine Handelsstrategie, die (1) erfüllt. Für $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ mit $\alpha_0 = 0, \beta_0 = c$ gilt jedoch $V_0^\varphi = c$ und $V_1^\varphi = (1+r)c > c$, d.h. $\varphi$ erfüllt (2).

b) Nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie tritt der Fall $|\mathcal{M}^*| = 0$ genau dann ein, wenn der Markt nicht arbitragefrei ist. Nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie tritt der Fall $|\mathcal{M}^*| = 1$ genau dann ein, wenn der Markt vollständig ist. Beide Hauptsätze zusammen implizieren, dass $|\mathcal{M}^*| \geq 2$ genau dann gilt, wenn der Markt arbitragefrei aber nicht vollständig ist. Aus der Konvexität von $\mathcal{M}^*$ folgt in diesem Fall sofort $|\mathcal{M}^*| = \infty$. Insgesamt gilt also $|\mathcal{M}^*| \in \{0, 1, \infty\}$.

c) Eine Nutzenfunktion ist nach Definition konkav. Mit der Jensen-Ungleichung folgt $\mathbb{E}[U(X)] \leq U(\mathbb{E}[X])$, d.h. die Investorin bevorzugt die sichere Auszahlung $\mathbb{E}[X]$.

d) Nein. Seien $X \sim \mathrm{Bin}(1, \frac{1}{2})$ und $Y \sim \delta_0$ auf dem gleichen Wahrscheinlichkeitsr aum definiert. Dann gilt $X \geq Y$ f.s. und folglich $X \succeq_{SSD} Y$ (sogar $\succeq_{FSD}$). Jedoch ist $0 = \mathrm{Var}(Y) < \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{4}$.