Bäuerle
Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.
Bemerkungen: Taschenrecher zugelassen

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Finanzmarkt mit zinsfreiem, normiertem Bond (d.h. $B_0 = B_1 = 1$) und zunächst einer Aktie. Es sei $\Omega = \{u, m, d\}$ und die mögliche Kursentwicklung der Aktie sei wie folgt:

$$S_0^{(1)} = 10 \quad \longrightarrow \quad S_1^{(1)}(u) = 11, \quad S_1^{(1)}(m) = 10, \quad S_1^{(1)}(d) = 9$$

a) Ist der Markt arbitragefrei und vollständig? Bestimmen Sie ggf. die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

b) Bestimmen Sie die Menge der fairen Preise zur Zeit $t = 0$ eines europäischen Calls C auf die Aktie $S^{(1)}$ mit Basispreis $K = 10$.

c) Im Finanzmarkt mit obigem Ω gebe es jetzt zusätzlich eine zweite Aktie $S^{(2)}$ mit möglicher Kursentwicklung

$$S_0^{(2)} = 10 \quad \longrightarrow \quad S_1^{(2)}(u) = x, \quad S_1^{(2)}(m) = 11, \quad S_1^{(2)}(d) = 11$$

Der Markt sei nun arbitragefrei und vollständig und der eindeutige faire Preis zur Zeit $t = 0$ des europäischen Calls C aus Teil b) sei $\pi(C) = \frac{1}{3}$. Welchen Wert muss x annehmen?

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Betrachten Sie ein CRR-Modell mit $T = 2$, $r = 5\%$, $S_0 = 20$ und Kursfaktoren $u = \frac{11}{10}$, $d = \frac{4}{5}$. Es werde eine Amerikanische Put-Option mit Basispreis $K = 21$ gehandelt.

a) Bestimmen Sie zur Zeit $t = 0$ einen fairen Preis für diese Option.

b) Bestimmen Sie eine optimale Ausübungsstrategie.

c) Bestimmen Sie die Anfangsposition (α_0, β_0) der Hedgingstrategie.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

Es gilt $X_1 \preceq_{\text{FSD}} X_2$ genau dann, wenn eine Zufallsvariable Y und Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existieren mit $f_1(y) \leq f_2(y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $X_1 \stackrel{d}{=} f_1(Y)$, $X_2 \stackrel{d}{=} f_2(Y)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Portfolio aus zwei Aktien A und B wie in der Tabelle unten angegeben. Die Aktien seien korreliert mit Korrelationskoeffizient $\rho = \frac{1}{3}$.

	Anzahl Aktien	Aktienpreis	Erwartete Rendite	Standardabw. Rendite
Aktie A	100	1,50 €	x	15 %
Aktie B	150	2 €	12 %	9 %

a) Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio und die zugehörige minimale Varianz.

b) Angenommen, es gibt ein weiteres risikoloses Wertpapier mit Rendite $R_0 = \frac{1}{16}$ und das Portfolio in der Tabelle ist das Tangentialportfolio. Welche erwartete Rendite hat dann Aktie A?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Wir definieren für eine Menge $\mathcal{Q}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ eine Abbildung $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ durch

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]. \tag{1}$$

Dabei ist $\mathcal{Q}$ so gewählt, dass ρ nur endliche Werte annimmt.

a) Zeigen Sie, dass ρ ein kohärentes Risikomaß ist.

Hinweis: Verteilungsinvarianz ist nicht nachzuweisen.

b) Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \in L^1$ gilt

$$\rho(X+Y) \geq \rho(X) - \rho(-Y).$$

c) Geben Sie ohne Begründung ein Beispiel für ein kohärentes Risikomaß der Form (1) an (Name und Menge $\mathcal{Q}$).

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Geben Sie auf die folgenden Fragen eine Antwort und begründen Sie diese kurz.

a) Gegeben sei ein endlicher, arbitragefreier Finanzmarkt. Bleibt der Finanzmarkt arbitragefrei, wenn man die Kurse der Wertpapiere zu einem deterministischen Wechselkurs von Euro in US-Dollar umrechnet?

b) Ist in einem endlichen, arbitragefreien Finanzmarkt die Menge der fairen Preise einer Option immer offen?

c) Ist der Preis einer amerikanischen Option stets echt größer als der Preis der entsprechenden europäischen Option?

d) Seien $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n,q)$, $n \in \mathbb{N}$, $p, q \in (0,1)$. Wann gilt $X \preceq_{\mathrm{FSD}} Y$?

e) Gegeben sei ein endlicher, arbitragefreier und vollständiger Finanzmarkt mit bekanntem physikalischem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$. Haben zwei Zahlungsansprüche, die unter $\mathbb{P}$ dieselbe Verteilung haben, immer auch denselben Preis?

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag: (2.5+1.5+2 = 6 Punkte)

a) Wir bestimmen, falls existent, die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^*$. Da $\tilde{S}^{(1)} = S^{(1)}$ muss für ein $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*$ gelten

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^{(1)} - S_0^{(1)}] = (11-10)q(u) + (10-10)q(m) + (9-10)q(d) = q(u) - q(d),$$

sowie $q(m) = 1 - q(u) - q(d)$. Damit folgt

$$\mathcal{M}^* = \left\{\mathbb{Q} : \ \mathbb{Q}(\{u\}) = \mathbb{Q}(\{d\}) = q, \ \mathbb{Q}(\{m\}) = 1 - 2q, \ q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Nach den Hauptsätzen der Preistheorie ist der Finanzmarkt arbitragefrei aber nicht vollständig.

b) Die fairen Preise liegen im Intervall $(\pi_-(C), \pi_+(C))$, wobei

$$\pi_+(C) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1^{(1)} - 10)^+] = \sup_{q \in (0,\frac{1}{2})} q = \frac{1}{2},$$
$$\pi_-(C) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1^{(1)} - 10)^+] = \inf_{q \in (0,\frac{1}{2})} q = 0.$$

Man beachte hierbei, dass $B_1 = 1$.

c) Aus der risikoneutralen Bewertungsformel folgt analog zu Teil b)

$$\frac{1}{3} = \pi(C) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1^{(1)} - 10)^+] = q.$$

Damit ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß gegeben durch $\mathbb{Q}(\{u\}) = \mathbb{Q}(\{m\}) = \mathbb{Q}(\{d\}) = \frac{1}{3}$. Bezüglich $S^{(2)} = \tilde{S}^{(2)}$ muss $\mathbb{Q}$ folgende Bedingung erfüllen:

$$0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^{(2)} - S_0^{(2)}] = (x - 10)\frac{1}{3} + (11 - 10)\frac{1}{3} + (11 - 10)\frac{1}{3} = \frac{x}{3} - \frac{8}{3}.$$

Daher ist $x = 8$.

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag: (4+1+2 = 7 Punkte)

a) Der CRR-Finanzmarkt ist arbitragefrei und vollständig, da $d < 1 + r < u$. Das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist bestimmt durch den Parameter $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{5}{6}$. Der Auszahlungsprozess $H_t = h(S_t) = (21 - S_t)^+$, $t = 0, 1, 2$, des amerikanischen Puts ist rekombinierend und gegeben durch

$$\begin{tikzcd}
 & & H_2(uu) = 0 \\
 & H_1(u) = 0 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
H_0 = 1 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & H_2(ud) = H_2(du) = \frac{17}{5} \\
 & H_1(d) = 5 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & H_2(dd) = \frac{41}{5}
\end{tikzcd}$$

Wir können den Preisalgorithmus anwenden:

$$p_2(S_2(uu)) = 0, \quad p_2(S_2(ud)) = p_2(S_2(du)) = \frac{17}{5}, \quad p_2(S_2(dd)) = \frac{41}{5},$$

$$\begin{aligned} p_1(S_1(u)) &= \max\left\{H_1(u), \frac{1}{1+r}\Big(qp_2(S_2(uu)) + (1-q)p_2(S_2(ud))\Big)\right\} \\ &= \max\left\{0, \frac{20}{21}\Big(\frac{5}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{17}{5}\Big)\right\} = \frac{34}{63}, \\ p_1(S_1(d)) &= \max\left\{H_1(d), \frac{1}{1+r}\Big(qp_2(S_2(du)) + (1-q)p_2(S_2(dd))\Big)\right\} \\ &= \max\left\{5, \frac{20}{21}\Big(\frac{5}{6}\cdot\frac{17}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{41}{5}\Big)\right\} = 5, \\ \pi(H) = p_0(S_0) &= \max\left\{H_0, \frac{1}{1+r}\Big(qp_1(S_1(u)) + (1-q)p_1(S_1(d))\Big)\right\} \\ &= \max\left\{1, \frac{20}{21}\Big(\frac{5}{6}\cdot\frac{34}{63} + \frac{1}{6}\cdot 5\Big)\right\} = \frac{4850}{3969}. \end{aligned}$$

b) Eine optimale Ausübungsstrategie τ^* ist gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \inf\{t \geq 0 : p_t(S_t(\omega)) = H_t(\omega)\} = \begin{cases} 1, & \omega \in \{(d,u),(d,d)\}, \\ 2, & \omega \in \{(u,u),(u,d)\}. \end{cases}$$

c) Wegen $\tau^* \geq 1$ gilt für die Hedging-Strategie φ:

$$V_1^\varphi = p_1(S_1), \qquad \text{d.h. } V_1^\varphi(u) = \frac{34}{63} \text{ und } V_1^\varphi(d) = 5.$$

Da φ selbstfinanzierend ist, muss $\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 = V_1^\varphi$ gelten, also

$$\begin{aligned} \alpha_0 22 + \beta_0\frac{21}{20} &= \frac{34}{63} \\ \alpha_0 16 + \beta_0\frac{21}{20} &= 5 \end{aligned} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{aligned} \alpha_0 6 \quad &= -\frac{281}{63} \\ \alpha_0 16 + \beta_0\frac{21}{20} &= 5. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $\varphi_0 = (\alpha_0, \beta_0) = (-\frac{281}{378}, \frac{63860}{3969})$.

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: (6 Punkte)

„$\Leftarrow$“ Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $\{f_1(Y) \leq t\} \supseteq \{f_2(Y) \leq t\}$. Damit folgt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$F_{X_1}(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t) = \mathbb{P}(f_1(Y) \leq t) \geq \mathbb{P}(f_2(Y) \leq t) = \mathbb{P}(X_2 \leq t) = F_{X_2}(t),$$

d.h. $X_1 \preceq_{\text{FSD}} X_2$.

„$\Rightarrow$“ $X_1 \preceq_{\text{FSD}} X_2$ impliziert $F_{X_1}^{-1}(u) \leq F_{X_2}^{-1}(u)$ für alle $u \in (0,1)$. Für eine Zufallsvariable $U \sim U(0,1)$ gilt $F_{X_i}^{-1}(U) \stackrel{d}{=} X_i$, $i = 1,2$. Man kann daher $f_1 = F_{X_1}^{-1}$, $f_2 = F_{X_2}^{-1}$ und $Y \sim U(0,1)$ wählen.

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag: (3+5 = 8 Punkte)

a) Da $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$ folgt

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{3}\cdot 0{,}15\cdot 0{,}09 = \frac{45}{10000}.$$

Die Kovarianzmatrix und ihre Inverse sind somit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10000}\begin{pmatrix} 225 & 45 \\ 45 & 81 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma^{-1} = \frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81 & -45 \\ -45 & 225 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$C = e^\mathsf{T}\Sigma^{-1}e = \frac{100}{162}(81 - 2\cdot 45 + 225) = \frac{400}{3}$$

ist das Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) gegeben durch

$$\pi^*_{\mathrm{MVP}} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}e = \frac{3}{400}\cdot\frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81 & -45 \\ -45 & 225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 36 \\ 180 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)^\mathsf{T}.$$

Die zugehörige Varianz ist

$$\mathrm{Var}(R^{\pi^*_{\mathrm{MVP}}}) = \frac{1}{C} = \frac{3}{400}.$$

b) Die Portfoliogewichte der beiden Aktien sind $\frac{150}{450}$ bzw. $\frac{300}{450}$ und das Tangentialportfolio ist nach Annahme also $\pi^*_{\mathrm{tang}} = \left(\frac{150}{450}, \frac{300}{450}\right)^\mathsf{T} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^\mathsf{T}$. Mit

$$A = m^\mathsf{T}\Sigma^{-1}e = (x, 0.12)\frac{100}{162}\begin{pmatrix} 36 \\ 180 \end{pmatrix} = \frac{200}{9}x + \frac{40}{3}$$

bestimmt sich das Tangentialportfolio durch

$$\begin{aligned} \pi^*_{\mathrm{tang}} &= \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{A - R^0 C} \\ &= \frac{\frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81\left(x - \frac{1}{16}\right) - \frac{207}{80} \\ -45\left(x - \frac{1}{16}\right) + \frac{207}{16} \end{pmatrix}}{\frac{200}{9}x + \frac{40}{3} - \frac{1}{16}\cdot\frac{400}{3}}. \end{aligned}$$

Die erste Komponente der Vektorgleichung führt auf

$$\frac{1}{3}\left(\frac{200}{9}x + 5\right) = \frac{100}{162}\left(81x - \frac{153}{20}\right)$$

mit eindeutiger Lösung $x = \frac{3}{20} = 15\%$.

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag: (2+2+1 = 5 Punkte)

a) Wir verifizieren die Axiome eines kohärenten Risikomaßes.

- *Monotonie:* Seien $X, Y \in L^1$ mit $X \le Y$. Aufgrund der Monotonie des Erwartungswertes gilt $\mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] \ge \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-Y]$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Supremumsbildung auf beiden Seiten liefert $\rho(X) \ge \rho(Y)$.
- *Translationsinvarianz:* Für $X \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$ gilt

$$\rho(X + m) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X - m] = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-X] - m = \rho(X) - m.$$

- *Konvexität:* Für $X, Y \in L^1$ und $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\rho\big(\lambda X + (1-\lambda)Y\big) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_\mathbb{Q}[-\lambda X - (1-\lambda)Y]$$

$$\leq \lambda \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] + (1-\lambda) \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y]$$
$$= \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

- *Positive Homogenität:* Für $X \in L^1$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\rho(\lambda X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-\lambda X] = \lambda \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] = \lambda\rho(X).$$

b) Es gilt für $X, Y \in L^1$

$$\begin{aligned}
\rho(X+Y) &= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X-Y] \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \Big(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y]\Big) \\
&\geq \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] + \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y] \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] \\
&= \rho(X) - \rho(-Y).
\end{aligned}$$

c) Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1]$ mit

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\lambda = \left\{\mathbb{Q} : \ \mathbb{Q} \text{ W'Maß auf } (\Omega, \mathcal{F}),\ \mathbb{Q} \ll \mathbb{P},\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: (2+1+1+2+2 = 8 Punkte)

a) Ja. Die äquivalenten Martingalmaße bestimmen sich aus den diskontierten Kursen $\frac{S_t^{(k)}}{B_t}$. Diese sind ohne Einheit.

b) Nein. Die Menge der fairen Preise einer erreichbaren Option ist einelementig und damit nicht offen.

c) Nein. Ein amerikanischer Call wird z.B. am Zeithorizont T optimal ausgeübt und ist daher gleich teuer wie der entsprechende europäische Call.

d) Es gilt

$$\begin{aligned}
X \preceq_{\text{FSD}} Y \ &\Leftrightarrow\ F_X(x) \geq F_Y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow\ \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geq \sum_{k=0}^{j} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \quad \text{für alle } j = 0, \ldots, n \\
&\Leftrightarrow\ p \leq q.
\end{aligned}$$

e) Nein. Als Gegenbeispiel betrachte ein einperiodiges CRR-Modell mit $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $r = 0$ und $\mathbb{P}(\{u\}) = \mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{2}$ sowie den Zahlungsansprüchen $H_1 = \mathbb{1}_{\{u\}}$, $H_2 = \mathbb{1}_{\{d\}}$. Unter $\mathbb{P}$ sind H_1 und H_2 beide Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wegen $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1}{3}$ ist jedoch

$$\pi(H_1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_1] = \mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{1}{3} < \frac{2}{3} = \mathbb{Q}(\{d\}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_2] = \pi(H_2).$$