Bäuerle

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.

Bemerkungen: Taschenrechner zugelassen

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem zinsfreien und normierten Bond B (d.h. $B_0 = B_1 = B_2 = 1$) und zwei Aktien S^1 und S^2. Die mögliche Kursentwicklung der Aktien in Tupelschreibweise $S_t = (S_t^1, S_t^2)$ mit $t = 0, 1, 2$ ist

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & & S_2(uu) = (10,5) \\
 & & S_1(u) = (7,5) & & S_2(um) = (7,5) \\
 & & & & S_2(ud) = (4,5) \\
S_0 = (4,3) & & S_1(m) = (2,4) & \text{———} & S_2(mm) = (2,4) \\
 & & S_1(d) = (2,1) & \text{———} & S_2(dm) = (2,1)
\end{array}
$$

a) Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^*$.

b) Ist der Markt arbitragefrei und vollständig?

c) Eine Bank verkauft zum Zeitpunkt $t = 0$ einen europäischen Call auf Aktie 1 mit Fälligkeit in $T = 2$ und Basispreis $K = 5$ zum Preis von 1.05. Wie hoch ist ihr risikoloser Gewinn?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger CRR-Markt mit den Parametern $r = 0.25$, $u = 1.3$ und $d = 1.1$. Weiter seien eine Aktie mit Anfangswert $S_0 = 100$ sowie eine amerikanische Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil

$$
\begin{array}{ccc}
 & & H_2(uu) = 50 \\
 & H_1(u) = 45 & \\
 & & H_2(ud) = 10 \\
H_0 = 10 & & \\
 & & H_2(du) = 30 \\
 & H_1(d) = 20 & \\
 & & H_2(dd) = 15
\end{array}
$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie den Preis der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0$.

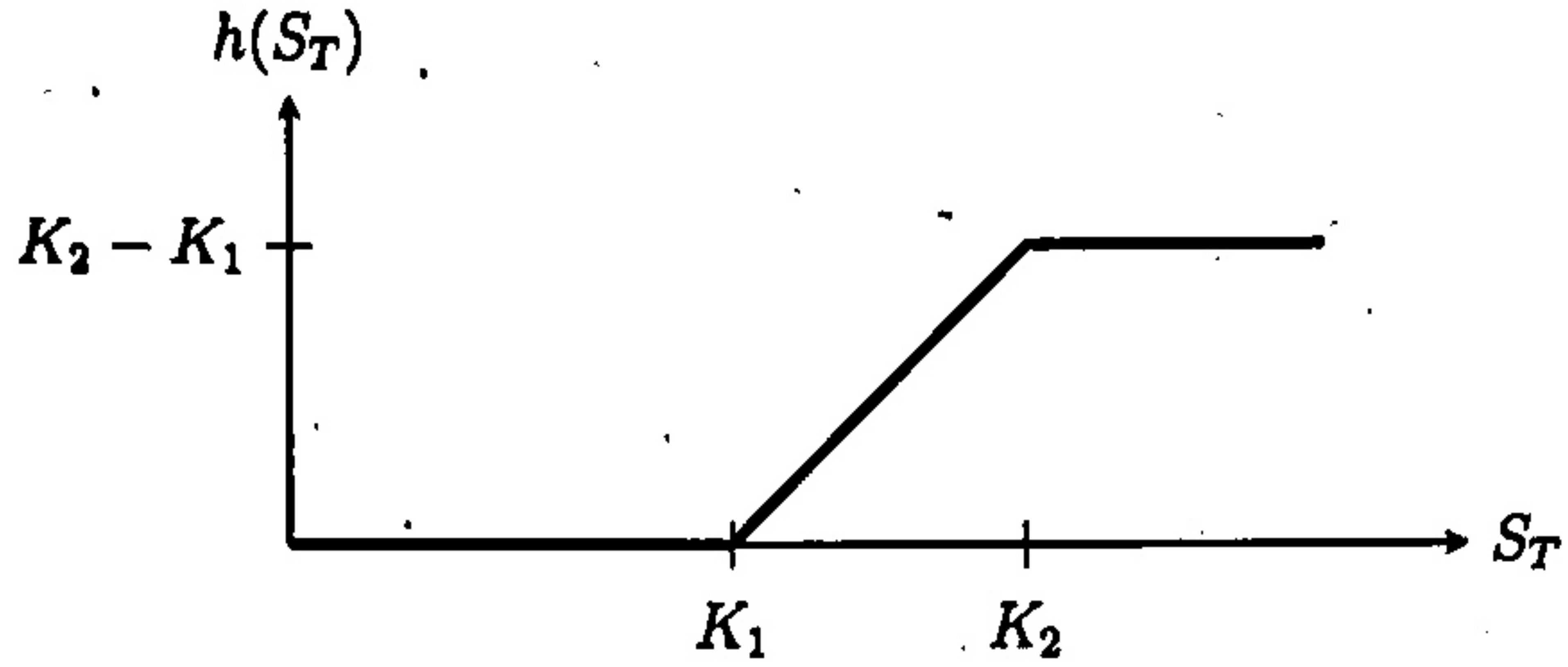
b) Geben Sie eine optimale Ausübungsstrategie an.

c) Bestimmen Sie die Anfangsposition (α_0, β_0) einer Hedging-Strategie für die amerikanische Option.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Gegeben sei ein endlicher, arbitragefreier und vollständiger Finanzmarkt mit einer Aktie S und einem Bond B.

a) Bilden Sie das folgende Auszahlungsprofil $h(S_T)$ zur Zeit T mit Call-Optionen nach:



b) Zur Zeit $t = 0$ werden auf die Aktie eine Call-Option C_1 mit Basispreis $K_1 = 10$ für 2 € und eine Call-Option C_2 mit Basispreis $K_2 = 20$ für 0.5 € gehandelt. Beide haben den gleichen Fälligkeitszeitpunkt T.
Was ist die kleinste obere Preisschranke für eine Call-Option C_3 auf die Aktie mit Basispreis $K_3 = 15$ und Fälligkeitszeitpunkt T, sodass keine Arbitragemöglichkeit entsteht? Beweisen Sie Ihre Behauptung durch Abschätzung des Auszahlungsprofils.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreies, T-periodiges CRR-Modell. Betrachten Sie das Portfoliooptimierungsproblem

$$\sup_{\varphi} \mathbb{E}[\log(V_T^{\varphi})] =: F(x_0)$$
$$\text{s.t. } V_0^{\varphi} = x_0 \in \mathbb{R}_+,$$

wobei φ eine selbstfinanzierende Handelsstrategie bezeichnet. Sie können ohne Nachweis verwenden, dass der Logarithmus der Inada-Bedingung genügt.

a) Bestimmen Sie das optimale Endvermögen in Abhängigkeit von der Zustandspreisdichte Z.

b) Wir betrachten das Optimierungsproblem jetzt mit Nutzenfunktion $\log(x - 10)$, d.h.

$$\sup_{\varphi} \mathbb{E}[\log(V_T^{\varphi} - 10)] =: G(x_0)$$
$$\text{s.t. } V_0^{\varphi} = x_0 \in \mathbb{R}_+.$$

Wie sieht jetzt das optimale Endvermögen aus? Welche Bedingung muss x_0 erfüllen, damit das Problem wohlgestellt ist? Drücken Sie G mithilfe von F aus.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Seien $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ ein verteilungsinvariantes monetäres Risikomaß und $X, Y \in L^1$.

a) Zeigen Sie
$$X \succeq_{FSD} Y \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \le \rho(Y).$$

b) Geben Sie ohne Begründung ein Beispiel für ρ an, das
$$X \succeq_{SSD} Y \quad \Rightarrow \quad \rho(X) \le \rho(Y) \tag{1}$$
erfüllt.

c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Implikation (1) im Allgemeinen nicht gilt.
Hinweis: Wähle X, Y mit $\mathbb{P}(X = 2) = 1$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}(Y = 4) = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Geben Sie auf die folgenden Fragen eine Antwort und begründen Sie diese kurz.

a) Gegeben sei ein endlicher, arbitragefreier Finanzmarkt mit einem zinslosen, normierten Bond und einer Aktie. Eine europäische Call-Option C und eine europäische Put-Option P, jeweils mit Laufzeit T und Basispreis K, haben zur Zeit $t = 0$ denselben Preis. Was ist der Anfangswert der Aktie?

b) Gegeben sei ein T-periodiges CRR-Model mit $d < 1 + r < u$ und $u, d, r > 0$. Gibt es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ mit $V_0^\varphi = x_0 > 0$ und $V_T^\varphi > x_0$?

c) Was lässt sich über Arbitragefreiheit und Vollständigkeit eines endlichen Finanzmarktes mit nicht leerer, höchstens abzählbarer Menge äquivalenter Martingalmaße sagen?

d) Es gilt $AVaR_\lambda(X) = -\frac{\lambda}{2}$, $\lambda \in (0, 1]$. Welche Verteilung hat X?

e) Die täglichen log-Returns einer Aktie $L_{t+1} := \log\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right)$, $t \ge 0$, seien unabhängig identisch verteilt. An höchstens wie vielen Tagen erwarten Sie über ein Jahr mit 250 Handelstagen einen kleineren log-Return als $-VaR_{0.1}(L_1)$?

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag: (4+1+2 = 7 Punkte)

a) Wir betrachten zunächst den Übergang von $t = 0$ nach $t = 1$. Hier muss gelten:

$$4 = \frac{S_0^1}{B_0} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{S_1^1}{B_1}\right] = 7q(u) + 2q(m) + 2(1 - q(u) - q(m)) = 5q(u) + 2,$$
$$3 = \frac{S_0^2}{B_0} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{S_1^2}{B_1}\right] = 5q(u) + 4q(m) + 1(1 - q(u) - q(m)) = 4q(u) + 3q(m) + 1.$$

Aus der ersten Gleichung folgt direkt $q(u) = \frac{2}{5}$, damit folgt aus der zweiten $q(m) = \frac{2}{15}$ und schließlich $q_1(d) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15}$.
Für den Übergang von $t = 1$ nach $t = 2$ gilt offensichtlich $q(dm \mid d) = q(mm \mid m) = 1$. Im Zustand u erhalten wir die Bedingung

$$7 = \frac{S_1^1}{B_1} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{S_2^1}{B_2}\right] = 10q(uu \mid u) + 7q(um \mid u) + 4(1 - q(uu \mid u) - q(um \mid u))$$
$$= 4 + 6q(uu \mid u) + 3q(um \mid u),$$
$$5 = \frac{S_1^2}{B_1} = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{S_2^2}{B_2}\right] = 5q(uu \mid u) + 5q(um \mid u) + 5(1 - q(uu \mid u) - q(um \mid u)) = 5.$$

Die zweite Gleichung ist redundant. Die erste ist äquivalent zu

$$1 = 2q_2(uu \mid u) + q_2(um \mid u)$$

ist. Wir wählen $q_2(uu \mid u) = \lambda \in (0, 1)$ als freien Parameter und erhalten $q_2(um \mid u) = 1 - 2\lambda$, $q_2(ud \mid u) = 1 - \lambda - 1 + 2\lambda = \lambda$. Damit dies Wahrscheinlichkeiten sind, muss $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ gelten. Durch Multiplikation ergibt sich schließlich

ω	uu	um	ud	mm	dm
$\mathbb{Q}(\{\omega\})$	$\frac{2}{5} \cdot \lambda$	$\frac{2}{5} \cdot (1 - 2\lambda)$	$\frac{2}{5} \cdot \lambda$	$\frac{2}{15} \cdot 1$	$\frac{7}{15} \cdot 1$

wobei $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$.

b) Da $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ ist der Markt nach dem ersten Haupsatz der Preistheorie arbitragefrei. Da $|\mathcal{M}^*| > 1$ ist er nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie jedoch nicht vollständig.

c) Der Call hat das Auszahlungsprofil $H = (S_2^1 - 5)^+$. Für $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*$ gilt

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \frac{2}{5} \cdot \lambda \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot (1 - 2\lambda) \cdot 2 = 2\lambda + \frac{4}{5} - \frac{8}{5} \cdot \lambda = \frac{2}{5} \cdot \lambda + \frac{4}{5}.$$

Der höchste arbitragefreie Preis ist somit

$$\pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \sup_{\lambda \in (0, \frac{1}{2})} \frac{2}{5} \cdot \lambda + \frac{4}{5} = 1$$

und der risikolose Gewinn der Bank $1.05 - 1 = 0.05$.

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag: (3+1+2 = 6 Punkte)

a) Es gilt $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{3}{4}$ und $B_1 = \frac{5}{4}$, $B_2 = \frac{25}{16}$. Durch Rückwärtsrekursion berechnen wir die Snell-Einhüllende von $\frac{H_t}{B_t}$. Es gilt $Z_2 = \frac{H_2}{B_2}$, also

$$Z_2(uu) = 32, \quad Z_2(ud) = \frac{32}{5}, \quad Z_2(du) = \frac{96}{5}, \quad Z_2(dd) = \frac{48}{5}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} Z_1(u) &= \max\left\{\frac{H_1}{B_1}(u), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](u)\right\} = \max\left\{36, \frac{3}{4}\cdot 32 + \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{5}\right\} = 36, \\ Z_1(d) &= \max\left\{\frac{H_1}{B_1}(d), \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](d)\right\} = \max\left\{16, \frac{3}{4}\cdot\frac{96}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{48}{5}\right\} = \frac{84}{5}, \\ Z_0 &= \max\{H_0, \mathbb{E}_{\mathbf{Q}}[Z_1|\mathcal{F}_0]\} = \max\left\{10, \frac{3}{4}\cdot 36 + \frac{1}{4}\cdot\frac{84}{5}\right\} = \frac{156}{5}. \end{aligned}$$

Der Preis der amerikanischen Option zum Zeitpunkt $t = 0$ ist somit $Z_0 = \frac{156}{5}$.

b) Eine optimale Stoppzeit ist

$$\tau^*(\omega) = \inf\left\{t \geq 0 : Z_t(\omega) = \frac{H_t}{B_t}(\omega)\right\} = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 2 & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

c) Wegen $\tau^* \geq 1$ gilt für die Hedging-Strategie φ:

$$V_1^\varphi = B_1 Z_1, \qquad \text{d.h. } V_1^\varphi(u) = 45 \text{ und } V_1^\varphi(d) = 21.$$

Da φ selbstfinanzierend ist, muss $\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 = V_1^\varphi$ gelten, also

$$\begin{aligned} \alpha_0 130 + \beta_0 \frac{5}{4} &= 45 \\ \alpha_0 110 + \beta_0 \frac{5}{4} &= 21 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha_0 20 \qquad &= 24 \\ \alpha_0 110 + \beta_0 \frac{5}{4} &= 21. \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $\varphi_0 = (\alpha_0, \beta_0) = (\frac{6}{5}, -\frac{444}{5})$.

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: (2+4 = 6 Punkte)

a) Aus der Abbildung lässt sich entnehmen, dass

$$h(S_T) = \begin{cases} 0, & S_T < K_1, \\ S_T - K_1, & K_1 \leq S_T < K_2, \\ K_2 - K_1, & K_2 \leq S_T. \end{cases}$$

Durch Unterscheidung der drei Fälle sieht man, dass

$$h(S_T) = (S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+.$$

b) Mit $K_1 = 10$, $K_2 = 20$ und $K_3 = 15$ folgt aus der Konvexität von $x \mapsto x^+$

$$(S_T - K_3)^+ = \left(S_T - \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\right)^+ = \left(\frac{1}{2}(S_T - K_1) + \frac{1}{2}(S_T - K_2)\right)^+$$
$$\leq \frac{1}{2}(S_T - K_1)^+ + \frac{1}{2}(S_T - K_2)^+.$$

Hier gilt Gleichheit, falls $\mathbb{P}(S_T \geq 20) = 1$, d.h. dies ist eine kleinste obere Schranke für einen allgemeinen Aktienpreisprozess. Da der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist existiert genau ein äquivalentes Martingalmaß und wir können die risikoneutrale Bewertungsformel auf die Zahlungsansprüche auf beiden Seiten der Ungleichung anwenden. Es folgt $\pi(C_3) \leq \frac{1}{2}\pi(C_1) + \frac{1}{2}\pi(C_2) = 1.25$.

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag: (2+4 = 6 Punkte)

a) Hier ist $U(x) = \log(x)$, $U'(x) = \frac{1}{x}$ und $I(y) = U'^{-1}(y) = \frac{1}{y}$. Nach der Martingalmethode gilt für das optimale Endvermögen

$$X^* = I(y^*Z) = \frac{1}{y^*Z}.$$

Der Parameter y^* bestimmt sich aus der Nebenbedingung

$$x_0 = \mathbb{E}\left[ZI(y^*Z)\right] = \frac{1}{y^*}.$$

Folglich ist

$$X^* = \frac{x_0}{Z}.$$

b) Jetzt ist $U(x) = \log(x - 10)$, $U'(x) = \frac{1}{x-10}$ und $I(y) = U'^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 10$. Die Nebenbedingung lautet

$$x_0 = \mathbb{E}\left[ZI(y^*Z)\right] = \frac{1}{y^*} + 10\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{y^*} + \frac{10}{B_T},$$

d.h. das optimale Endvermögen ist

$$X^* = I(y^*Z) = \frac{1}{y^*Z} + 10 = \frac{x_0 - \frac{10}{B_T}}{Z} + 10.$$

Da die Nutzenfunktion nur auf $(10, \infty)$ definiert ist, muss für die Wohlgestelltheit $x_0 > \frac{10}{B_T}$ gelten. Für die optimalen Zielfunktionswerte folgt durch Anwendung der Nutzenfunktionen auf das optimale Endvermögen und Erwartungswertbildung

$$G(x_0) = F\left(x_0 - \frac{10}{B_T}\right).$$

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag: (2+1+4 = 7 Punkte)

a) Für $X, Y \in L^1$ mit $X \succeq_{FSD} Y$ existieren Zufallsvariablen $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum für die gilt $\widetilde{X} \stackrel{d}{=} X$, $\widetilde{Y} \stackrel{d}{=} Y$ und $\widetilde{X} \geq \widetilde{Y}$. Mit der Verteilungsinvarianz und Monotonie von ρ folgt

$$\rho(X) = \rho(\widetilde{X}) \leq \rho(\widetilde{Y}) = \rho(Y).$$

Bemerkung: Man kann konkret wählen $\widetilde{X} := F_X^{-1}(U)$, $\widetilde{Y} := F_Y^{-1}(U)$ für ein $U \sim U(0,1)$, was hier jedoch nicht verlangt wird.

b) Average Value at Risk zum Niveau $\lambda \in (0,1]$ erfüllt (1).

c) Wir weisen zunächst nach, dass für X, Y wie aus dem Hinweis $X \succeq_{SSD} Y$ gilt. Sei dazu U eine Nutzenfunktion. Mit der Jensenschen Ungleichung folgt

$$\mathbb{E}[U(X)] = U(2) = U(\mathbb{E}[Y]) \geq \mathbb{E}[U(Y)],$$

also $X \succeq_{SSD} Y$. Für $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} VaR_\lambda(X) &= -2 + VaR_\lambda(0) = -2, \\ VaR_\lambda(Y) &= -\sup\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(Y < y) \leq \lambda\} = \begin{cases} -1, & 0 < \lambda < \frac{2}{3}, \\ -4, & \frac{2}{3} \leq \lambda < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ist $VaR_{\frac{2}{3}}$ zusammen mit X, Y aus dem Hinweis ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: (1+1+2+2+2 = 8 Punkte)

a) Nach der Put-Call-Parität gilt

$$S_0 = \pi(C) + K - \pi(P) = K.$$

b) Ja, zum Beispiel $\alpha_t = 0$ und $\beta_t = x_0$ für alle $t = 0, \dots, T-1$.

c) Die Menge der äquivalenten Martingalmaße ist konvex und daher einelementig. Der Finanzmarkt ist somit arbitragefrei und vollständig.

d) Es gilt $\int_0^\lambda VaR_\gamma(X) d\gamma = \lambda AVaR_\lambda(X) = -\frac{\lambda^2}{2}$. Differenzieren auf beiden Seiten ergibt $-\lambda = VaR_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda)$. Diese Funktion ist invertierbar und man erhält $F_X(x) = x$, $x \in (0,1)$. Folglich ist $X \sim U(0,1)$.

e) Es gilt $-VaR_{0.1}(L_1) = \sup\{x : \mathbb{P}(L_1 < x) \leq 0.1\}$. Folglich ist $\mathbb{P}(L_1 < -VaR_{0.1}(L_1)) \leq 0.1$. Die erwartete Anzahl an Unterschreitungen ist daher höchstens $0.1 \cdot 250 = 25$.