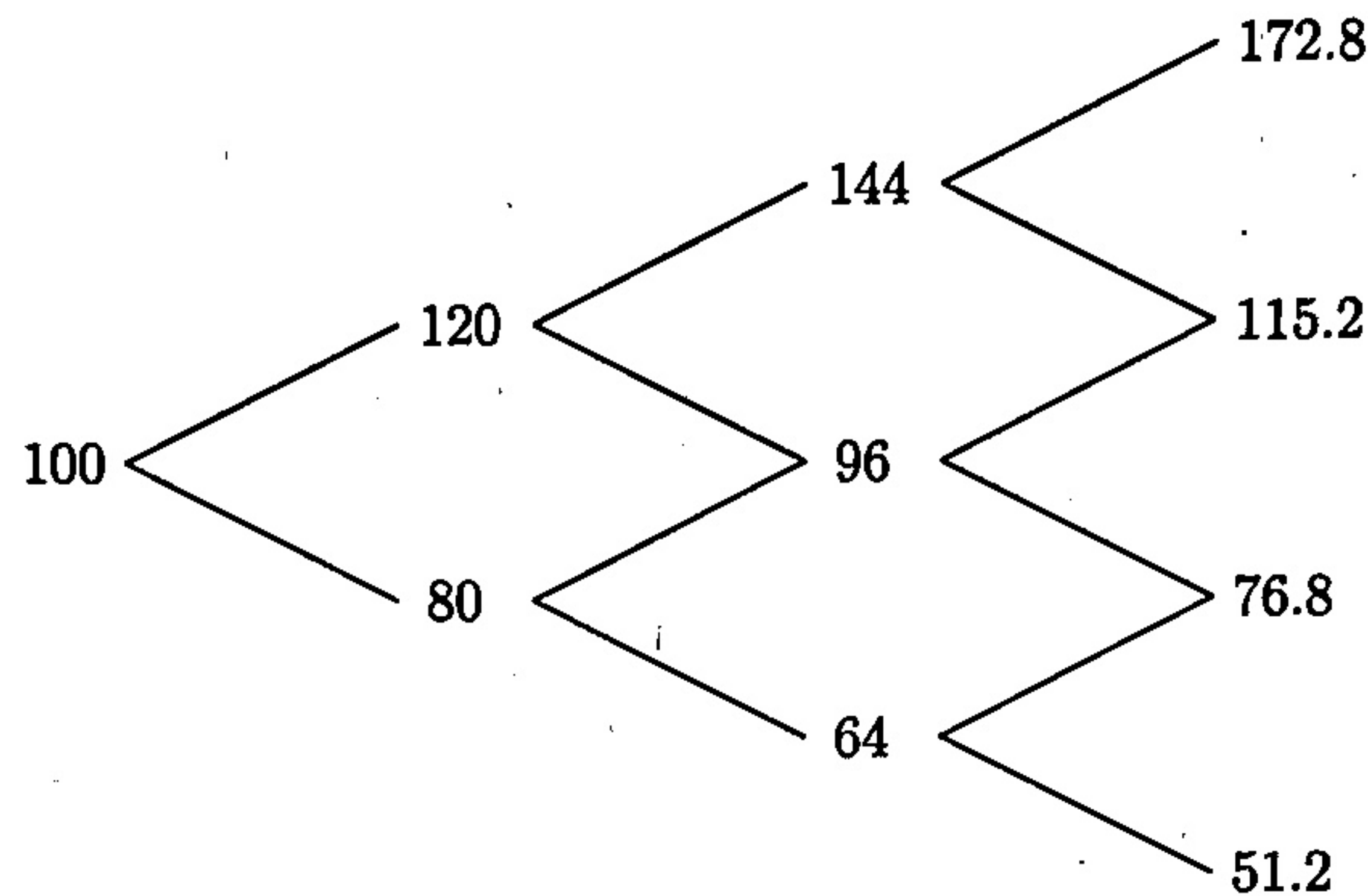


Aufgabe 1 (1+1+3+2=7 Punkte)

Gegeben sei ein dreiperiodiger Finanzmarkt mit normiertem risikolosem Wertpapier (d.h. $B_0 = 1$) mit Zinssatz r und einer Aktie S . Es sei $\Omega = \{u, d\}^3$ und die mögliche Kursentwicklung der Aktie sei wie folgt:



- Welche Anforderungen müssen die Parameter eines Cox-Ross-Rubinstein-Finanzmarkts erfüllen, damit Arbitragefreiheit vorliegt?
- Für welche $r \in [0, \infty)$ ist obiger Finanzmarkt arbitragefrei? Begründen Sie ihre Antwort.
- Sei nun $r = 0.1$.
Betrachten Sie folgende „Eurasische“ Option H , bei der der Basispreis dem arithmetischen Mittel des Aktienkurses zu den letzten beiden Zeitpunkten entspricht. Zum Fälligkeitszeitpunkt $T = 3$ besitzt die Option also die Auszahlung

$$H = (S_3 - K)^+,$$

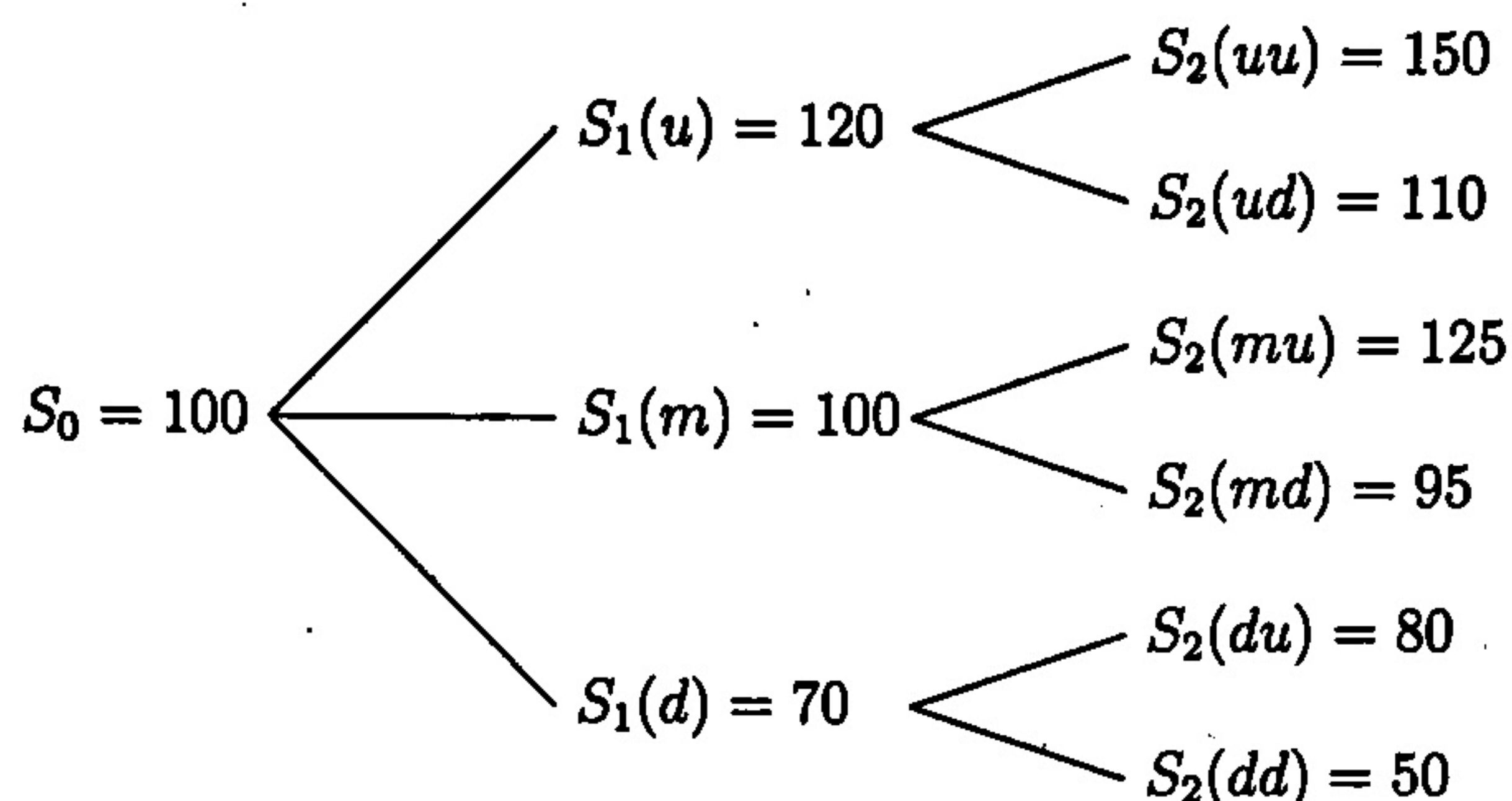
wobei $K = \frac{1}{2}(S_2 + S_3)$.

Bestimmen Sie den fairen Preis der Option zur Zeit $t = 0$.

- Bestimmen Sie die Anfangsinvestitionen α_0 und β_0 der zu H gehörenden Hedging-Strategie.

Aufgabe 2 (0.5+4+1.5+1=7 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit normiertem risikolosem Wertpapier B mit Zinssatz $r = 0.1$. Zusätzlich existiere eine Aktie S mit folgendem Aktienpreisverlauf:



- Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum Ω an, welcher alle möglichen Pfade des Aktienpreises enthält.
- Untersuchen Sie den Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.
- Betrachten Sie nun auf diesem Finanzmarkt einen Inline-Optionsschein H mit Schranken $K_1 = 115$ und $K_2 = 75$. Der Optionsschein zahlt zum Ende der Laufzeit ($T = 2$) einen festen Betrag von 10 Geldeinheiten, falls sich die Aktie während des gesamten Beobachtungszeitraums innerhalb der Schranken bewegt. Wird die obere Schranke überschritten oder die untere Schranke unterschritten, verfällt die Option wertlos. Die Auszahlung ist also gegeben durch

$$H(\omega) = \begin{cases} 10, & S_i(\omega) \in (75, 115), \quad i = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

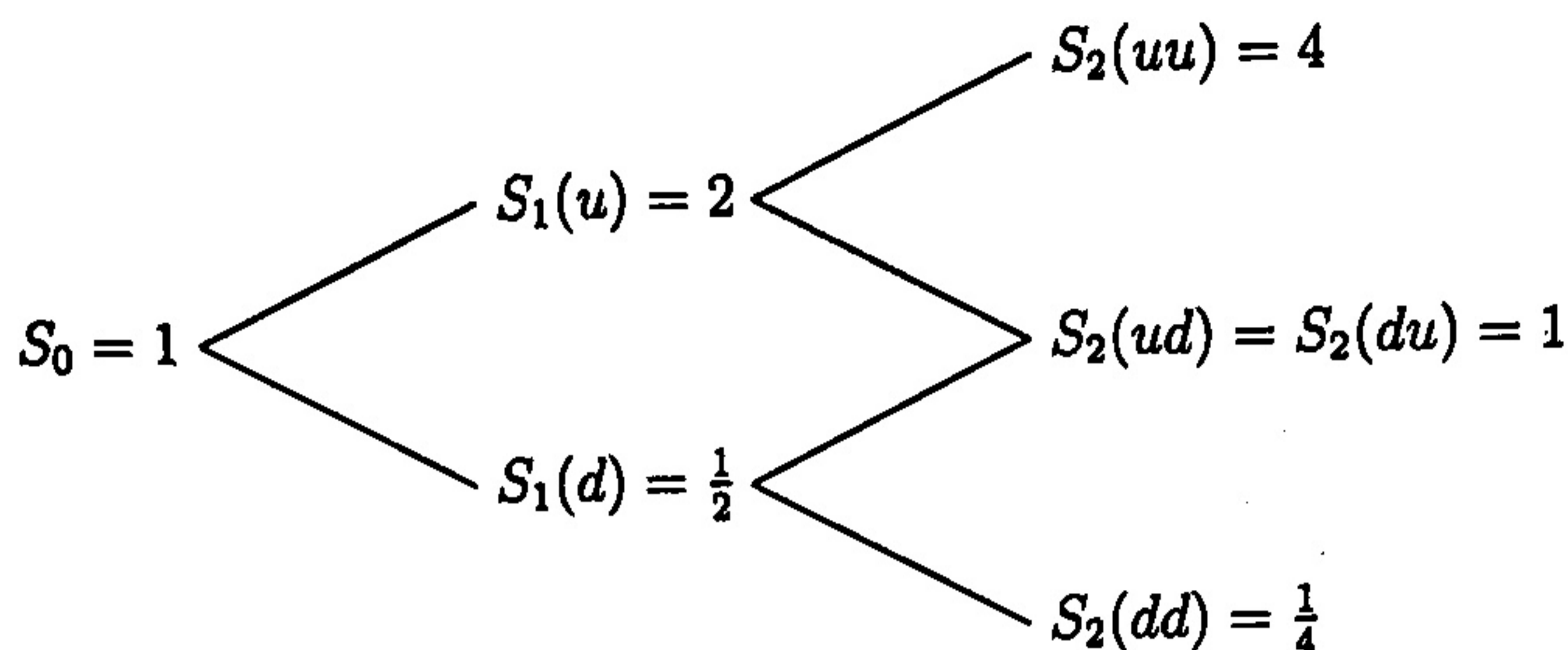
Ist der Preis der Inline-Option eindeutig bestimmt? Falls ja, geben Sie den Preis an und andernfalls ein Preisintervall. Ist der Zahlungsanspruch erreichbar?

- Nun existiere am Markt noch ein Butterfly-Spread auf obige Aktie mit Fälligkeitszeitpunkt $T = 2$, bestehend aus dem Kauf zweier Calls mit Basispreisen 80 bzw. 110 sowie dem Verkauf von zwei Calls zum gleichen Basispreis 95. Wie sieht das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads zum Fälligkeitszeitpunkt $T = 2$ aus?

Der Butterfly-Spread besitze nun am Markt einen Preis von $\pi_0 = 1.5$. Wieviel kostet dann die Inline-Option, wenn im Markt keine Arbitrage entstehen darf?

Aufgabe 3 (1.5+1+4.5+1=8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger CRR-Finanzmarkt mit den Parametern $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{1}{4}$, wobei $B_0 = 1$ und $S_0 = 1$. Es gilt also



a) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathcal{M}^* an.

Weiter sei ein amerikanischer Call mit Basispreis $K = \frac{1}{2}$ gegeben, der beim Ausüben zum Zeitpunkt $t = 1$ im guten Marktzustand „ u “ zusätzlich eine Dividende in Höhe von $D > 0$ auszahlt. Es gilt also

$$H_1(u) = (S_1(u) - K)^+ + D$$

In allen anderen Marktzuständen fällt keine Dividende an.

- b) Wie sieht der Auszahlungsprozess der Option aus?
- c) Bestimmen Sie den fairen Preis der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0$ in Abhängigkeit von D so explizit wie möglich. Wie sieht im Fall $D = 1$ die optimale Ausübungsstrategie aus?
- d) Wie groß ist die Dividende, wenn der faire Preis der Option zur Zeit $t = 0$ gerade 1 beträgt?

Aufgabe 4 (1.5+3+1.5=6 Punkte)

- a) Seien μ und ν zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} . Geben Sie jeweils **eine** Charakterisierung der stochastischen Dominanz erster und zweiter Ordnung an. Begründen Sie anschließend, warum aus stochastischer Dominanz erster Ordnung die stochastische Dominanz zweiter Ordnung folgt, also

$$\mu \succ_{FSD} \nu \implies \mu \succ_{SSD} \nu.$$

- b) Nun seien μ und ν jeweils Cauchy-Verteilungen mit Parametern $s \in (0, \infty)$ und $t_\mu, t_\nu \in \mathbb{R}$, also

$$\mu = \text{Cauchy}(s, t_\mu) \quad \nu = \text{Cauchy}(s, t_\nu).$$

Zeigen Sie:

$$\mu \succ_{FSD} \nu \iff t_\mu \geq t_\nu$$

Hinweis: Die Verteilungsfunktion einer Cauchy-Verteilung mit Parametern $s \in (0, \infty)$ und $t \in \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$F_{s,t}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- c) Gegeben sei die Binomialverteilung $\nu = \text{Bin}(5, \frac{1}{2})$ mit $n = 5$ Versuchen und Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$. Finden Sie zwei beliebige, verschiedenen Verteilungen μ , sodass gilt

$$\mu \succ_{FSD} \nu.$$

Aufgabe 5 (2+1+1+1=5 Punkte)

Betrachten Sie das Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz bzw. de Finetti

$$(P): \quad \min \frac{1}{2} \pi^\top \Sigma \pi \quad \text{s.t.} \quad \pi \cdot m = m_p, \quad \pi \cdot e = 1,$$

wobei $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^d$ und m und e linear unabhängig sind. Die Anlagen seien alle unkorreliert und die i -te Anlage habe eine Varianz von $\sigma_i^2 > 0$, $i = 1, \dots, d$.

- Welches ist die globale minimale Varianz, die bei der Anlage des Startvermögens in diesem Markt erreicht werden kann? Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung an. Für welchen Wert der Zielrendite m_p ergibt sie sich als Lösung von (P)?
- Bestimmen Sie das Portfolio, welches die globale minimale Varianz erreicht.
- Angenommen für die Zielrendite gilt $m_p > \max_i m_i$. Gibt es überhaupt ein Portfolio, das die Zielrendite erreicht?
- Nehmen Sie an, es gibt eine weitere risikolose Anlage mit Rendite R^0 . Zeigen Sie, dass in diesem Fall das Tangentialportfolio proportional zu $(\frac{m_1 - R^0}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{m_d - R^0}{\sigma_d^2})$ ist.

Aufgabe 6 (1+2+2+2=7 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\lambda \in (0, 1)$ und $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, also strikt wachsend, strikt konkav. Wir betrachten hier nur Zufallsvariablen $X \in L^1$, die stetig sind. Definiere

$$\rho_U^\lambda(X) := -U^{-1}\left(\mathbb{E}[U(X)|X < -\text{VaR}_\lambda(X)]\right).$$

- Geben Sie eine Definition des Average-Value-at-Risk an.
- Zeigen Sie, dass ρ_U^λ wie folgt dargestellt werden kann:

$$\rho_U^\lambda(X) := -U^{-1}\left(-\text{AVaR}_\lambda(U(X))\right).$$

Hinweis: Für jede strikt wachsende, stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: q ist ein λ -Quantil von X genau dann, wenn $f(q)$ ein λ -Quantil von $f(X)$ ist.

- Zeigen Sie, dass $\rho_U^\lambda(X)$ monoton und verteilungsinvariant ist.
- Zeigen Sie, dass $\rho_U^\lambda(X)$ translationsinvariant ist, wenn $U(x) = -e^{-x}$ ist.

Aufgabe 1

a) Arbitragefreiheit liegt vor, falls gilt

$$d < 1 + r < u.$$

b) Beim Finanzmarkt handelt es sich um ein CRR-Modell mit Parametern $u = 1.2$ und $d = 0.8$. Damit (NA) vorliegt, muss nach Vorlesung gelten

$$\begin{aligned} d < 1 + r < u \\ \Leftrightarrow 0.8 < 1 + r < 1.2 \\ \Leftrightarrow -0.2 < r < 0.2. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also $r \in [0, \frac{1}{5})$.

c) Wir verwenden die risikoneutrale Bewertungsformel. Zunächst ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß bestimmt durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{3}{4}.$$

Die Auszahlungen der Option in den verschiedenen Marktzuständen zum Endzeitpunkt sind

$$\begin{array}{cccc} H(uuu) = 14.4 & H(uud) = 0 & H(udu) = 9.6 & H(udd) = 0 \\ H(duu) = 9.6 & H(dud) = 0 & H(ddu) = 6.4 & H(ddd) = 0. \end{array}$$

Damit kann nun mit der risikoneutralen Bewertungsformel der faire Preis der Option berechnet werden:

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_3} \right] = \frac{1}{1.1^3} \left(14.4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^3 + 2 \cdot 9.6 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 \frac{1}{4} + 6.4 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right) = \frac{75}{11}.$$

d) Wir berechnen zunächst mithilfe der risikoneutralen Bewertungsformel die fairen Preise der Option zum Zeitpunkt $t = 1$.

$$\pi_1(H)(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1 \right] (u) = \frac{1}{1.1^2} \left(14.4 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 9.6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{90}{11},$$

$$\pi_1(H)(d) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1 \right] (d) = \frac{1}{1.1^2} \left(9.6 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 6.4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{60}{11}.$$

Für die Hedging-Strategie muss zum Zeitpunkt $t = 0$ nun folgendes LGS erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(u) \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(d) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} 120\alpha_0 + 1.1\beta_0 &= \frac{90}{11} \\ 80\alpha_0 + 1.1\beta_0 &= \frac{60}{11} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$(\alpha_0, \beta_0) = \left(\frac{3}{44}, 0 \right).$$

Aufgabe 2

- a) Zum Beispiel $\Omega = \{uu, ud, mu, md, du, dd\}$.
 b) Wir bestimmen die Menge der äquivalenten Martingalmaße.
 Oberer Teilbaum:

$$\begin{aligned} 150 q(u|u) + 110 q(d|u) &= 120 \cdot 1.1 \\ q(u|u) + q(d|u) &= 1 \end{aligned}$$

$$\iff q(u|u) = \frac{11}{20}, \quad q(d|u) = \frac{9}{20}.$$

Mittlerer Teilbaum:

$$\begin{aligned} 125 q(u|m) + 95 q(d|m) &= 100 \cdot 1.1 \\ q(u|m) + q(d|m) &= 1 \end{aligned}$$

$$\iff q(u|m) = \frac{1}{2} = q(d|m).$$

Unterer Teilbaum:

$$\begin{aligned} 80 q(u|d) + 50 q(d|d) &= 70 \cdot 1.1 \\ q(u|d) + q(d|d) &= 1 \end{aligned}$$

$$\iff q(u|d) = \frac{9}{10}, \quad q(d|d) = \frac{1}{10}.$$

Vorderer Teilbaum:

$$\begin{aligned} 120 q(u) + 100 q(m) + 70 q(d) &= 100 \cdot 1.1 \\ q(u) + q(m) + q(d) &= 1 \end{aligned}$$

Wähle $q := q(d)$ als freie Variable. Dann ist die Lösung des LGS gegeben durch

$$q(u) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}q, \quad q(m) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}q, \quad q(d) = q.$$

Nun muss q noch so gewählt werden, dass $\mathbb{Q}(\{\omega\}) \in (0, 1)$ für jedes $\omega \in \Omega$.

ω	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$	$\mathbb{Q}(\{\omega\}) \in (0, 1)?$
uu	$\frac{11}{40} + \frac{33}{40}q$	$q \in (-\frac{1}{3}, \frac{29}{33})$
ud	$\frac{9}{40} + \frac{27}{40}q$	$q \in (-\frac{1}{3}, \frac{31}{27})$
mu	$\frac{1}{4} - \frac{5}{4}q$	$q \in (-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$
md	$\frac{1}{4} - \frac{5}{4}q$	$q \in (-\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$
du	$\frac{9}{10}q$	$q \in (0, 1)$
dd	$\frac{1}{10}q$	$q \in (0, 1)$

Insgesamt ergibt sich also $q \in (0, \frac{1}{5})$.

Damit gilt nun

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \left(\frac{11}{40} + \frac{33}{40}q, \frac{9}{40} + \frac{27}{40}q, \frac{1}{4} - \frac{5}{4}q, \frac{1}{4} - \frac{5}{4}q, \frac{9}{10}q, \frac{1}{10}q \right) \mid q \in \left(0, \frac{1}{5} \right) \right\}.$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Optionspreistheorie ist der Finanzmarkt arbitragefrei, nach dem 2. Hauptsatz ist er jedoch nicht vollständig.

c) Die Option liefert nur im Zustand $\omega = md$ eine Auszahlung. Damit können mit der risikoneutralen Bewertungsformel sofort die Preisschranken berechnet werden:

$$\pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \right] = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \frac{1}{1.1^2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}q \right) = \frac{250}{121}$$

$$\pi_-(H) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \right] = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*} \frac{1}{1.1^2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4}q \right) = 0$$

Da sich die Preisschranken unterscheiden, ist der Preis nicht eindeutig und die Option ist insbesondere nicht erreichbar.

d) Der Butterfly-Spread liefert ebenfalls nur eine Auszahlung im Zustand md , allerdings 15 Geldeinheiten statt 10. Da der Preis des Spreads 1.5 Geldeinheiten beträgt, muss der Preis der Inline-Option 1 Geldeinheit betragen, damit weiterhin (NA) gilt. Wäre die Inline-Option billiger, könnte man Arbitrage erzielen durch Kaufen von 1.5 Inline-Optionen und Leerverkaufen des Butterfly Spreads. Wäre die Inline-Option teurer, müsste man die Strategie einfach umkehren.

Aufgabe 3

a) Da es sich um einen arbitragefreien und vollständigen CRR-Finanzmarkt handelt, ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß bestimmt durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1.25 - 0.5}{2 - 0.5} = \frac{1}{2}$$

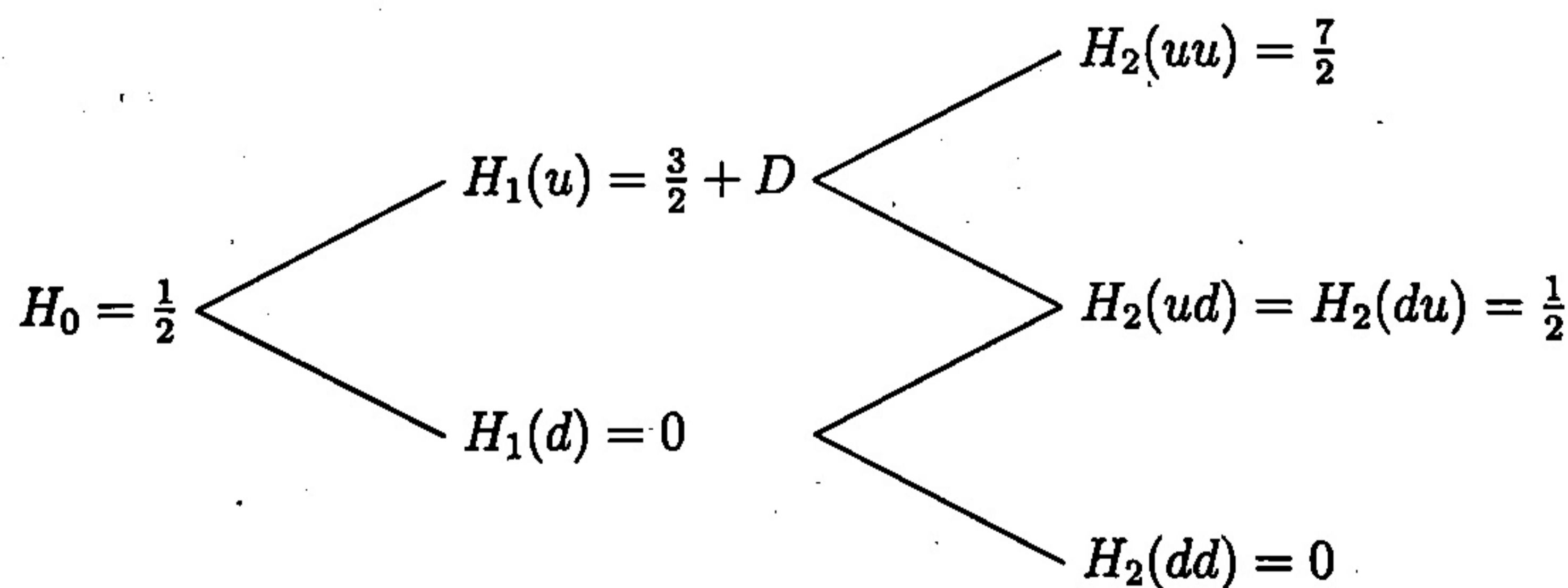
Es gilt also

$$\mathbb{Q}(\{uu\}) = \mathbb{Q}(\{ud\}) = \mathbb{Q}(\{du\}) = \mathbb{Q}(\{dd\}) = \frac{1}{4}$$

und damit

$$\mathcal{M}^* = \{\mathbb{Q}\}$$

b)



c) Berechne die Snell-Einhüllende von $\left(\frac{H_t}{B_t} \right)_{t=0,1,2}$

$$Z_2(uu) = \frac{H_2(uu)}{B_2} = \frac{56}{25}, \quad Z_2(ud) = Z_2(du) = \frac{8}{25}, \quad Z_2(dd) = 0$$

$$Z_1(u) = \max \left\{ \frac{H_1(u)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 | \mathcal{F}_1](u) \right\} = \max \left\{ \frac{6}{5} + \frac{4}{5}D, \frac{32}{25} \right\}$$

$$Z_1(d) = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{25} \right\} = \frac{4}{25}$$

$$\begin{aligned}
Z_0 &= \max \left\{ \frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_Q[Z_1 | \mathcal{F}_0] \right\} \\
&= \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{25} + \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{6}{5} + \frac{4}{5}D, \frac{32}{25} \right\} \right\} \\
&= \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{17}{25} + \max \left\{ \frac{2}{5}D, \frac{1}{25} \right\} \right\} \\
&= \frac{17}{25} + \frac{2}{5} \max \left\{ D, \frac{1}{10} \right\}.
\end{aligned}$$

Die optimale Ausübungsstrategie im Fall $D = 1$ ist demnach gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 2, & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

d) Es gilt

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{17}{25} + \frac{2}{5} \max \left\{ D, \frac{1}{10} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{4}{5}.$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}
\text{a)} \quad \mu \succ_{FSD} \nu &\iff F_\mu(x) \leq F_\nu(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\
\mu \succ_{SSD} \nu &\iff \int_{-\infty}^c F_\mu(x) dx \leq \int_{-\infty}^c F_\nu(x) dx \quad \forall c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Gilt zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen stochastische Dominanz erster Ordnung, dann folgt die stochastische Dominanz zweiter Ordnung direkt aus der Monotonie des Integrals.

b) Wir verwenden die Charakterisierung aus a). Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
F_\mu(x) \leq F_\nu(x) &\iff \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x - t_\mu}{s} \right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{x - t_\nu}{s} \right) \\
&\iff \arctan \left(\frac{x - t_\mu}{s} \right) \leq \arctan \left(\frac{x - t_\nu}{s} \right) \\
&\iff \frac{x - t_\mu}{s} \leq \frac{x - t_\nu}{s} \\
&\iff t_\mu \geq t_\nu.
\end{aligned}$$

c) Schnellster Weg: Wähle einfach $\mu \equiv \nu$.
Anderer Weg: Wähle zum Beispiel

$$\mu(\{i\}) = \delta_5(\{i\}) = \begin{cases} 0, & i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ 1, & i = 5. \end{cases}$$

Dann gilt

$$F_\mu(i) \leq F_\nu(i) = \sum_{k=0}^i \binom{5}{k} \cdot \frac{1}{32}, \quad i \in \{0, \dots, 5\}$$

Aufgabe 5

Beachte zunächst, dass Σ als Diagonalmatrix mit positiven Einträgen positiv definit ist, die Voraussetzungen für die Existenz einer Lösung also erfüllt sind. Im Folgenden bezeichnen wir mit $\kappa := (\frac{m_1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{m_d}{\sigma_d^2})$. Mit den Bezeichnungen der Vorlesung gilt:

$$A = m^T \Sigma^{-1} e = \kappa^T e.$$

$$C = e^T \Sigma^{-1} e = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

a) Die minimale Varianz ist $1/C = 1/\sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i^2}$. Es gilt dann $m_p = A/C = \kappa^T e / \sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i^2}$.

b) Es gilt:

$$\pi_{MVP}^* = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} e = \frac{1}{\sum_{i=1}^d \frac{1}{\sigma_i^2}} \left(\frac{1}{\sigma_1^2}, \dots, \frac{1}{\sigma_d^2} \right)^T.$$

c) Ja, unter den obigen Voraussetzungen gibt es immer eine Lösung ggf. durch Leerverkauf einiger Anlagen.

d) Das Tangentialportfolio ist proportional zum Vektor $\Sigma^{-1}(m - R^0 e)$. Hier also zu dem angegebenen Vektor.

Aufgabe 6

a) Definition *AVaR* siehe Vorlesung.

b) Da U strikt wachsend, strikt konkav ist gilt (mit Hinweis):

$$\{X < -VaR_\lambda(X)\} = \{X < q_X\} = \{U(X) < q_{U(X)}\} = \{U(X) < -VaR_\lambda(U(X))\}.$$

Daher bekommt man:

$$\mathbb{E}[U(X)|X < -VaR_\lambda(X)] = \mathbb{E}[U(X)|U(X) < -VaR_\lambda(U(X))] = -AVaR_\lambda(U(X))$$

und somit die Behauptung.

c) Verteilungsinvariant ist klar, da *AVaR* verteilungsinvariant ist und hier nur Erwartungswerte vorkommen.

Für die Monotonie, beachte, dass U, U^{-1} monoton wachsend sind und $AVaR_\lambda$ ebenfalls.

d) Für das gegebene U gilt $U^{-1}(x) = -\ln(-x)$.
Also gilt für $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \rho_U^\lambda(X + c) &= -U^{-1}\left(-AVaR_\lambda(U(X + c))\right) \\ &= -U^{-1}\left(-e^{-c}AVaR_\lambda(U(X))\right) \\ &= -U^{-1}\left(-AVaR_\lambda(U(X))\right) - c. \end{aligned}$$