

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Gegeben sei ein dreiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit Parametern $u = 1.2$, $d = 0.8$ und $r = 0.1$. Der Startwert der Aktie sei $S_0 = 100$.

- Ist der Markt arbitragefrei? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Zeichnen Sie die Kursentwicklung der Aktie.

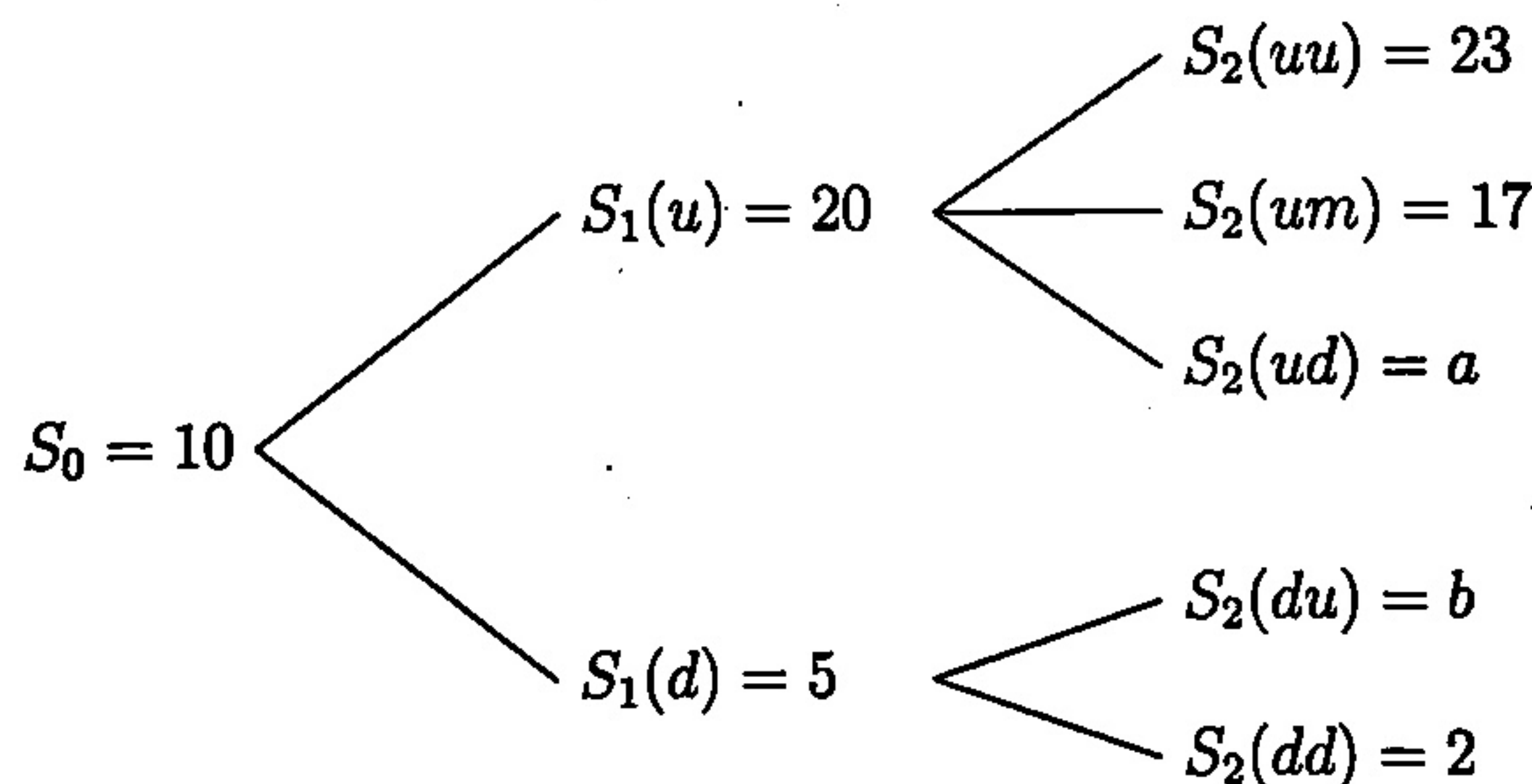
Nun sei auf obigem Finanzmarkt eine europäische Lookback-Call-Option H gegeben. Dabei entspricht der Basispreis dem niedrigsten Kurs, den die Aktie während der Laufzeit der Option angenommen hat. Die Auszahlung der Option zur Zeit $t = 3$ ist also gegeben durch

$$H = (S_3 - \min_{t=0,1,2,3} S_t)^+.$$

- Bestimmen Sie den fairen Preis der Option zur Zeit $t = 0$.
- Bestimmen Sie die Anfangsinvestitionen α_0 und β_0 der zu H gehörenden Hedging-Strategie.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

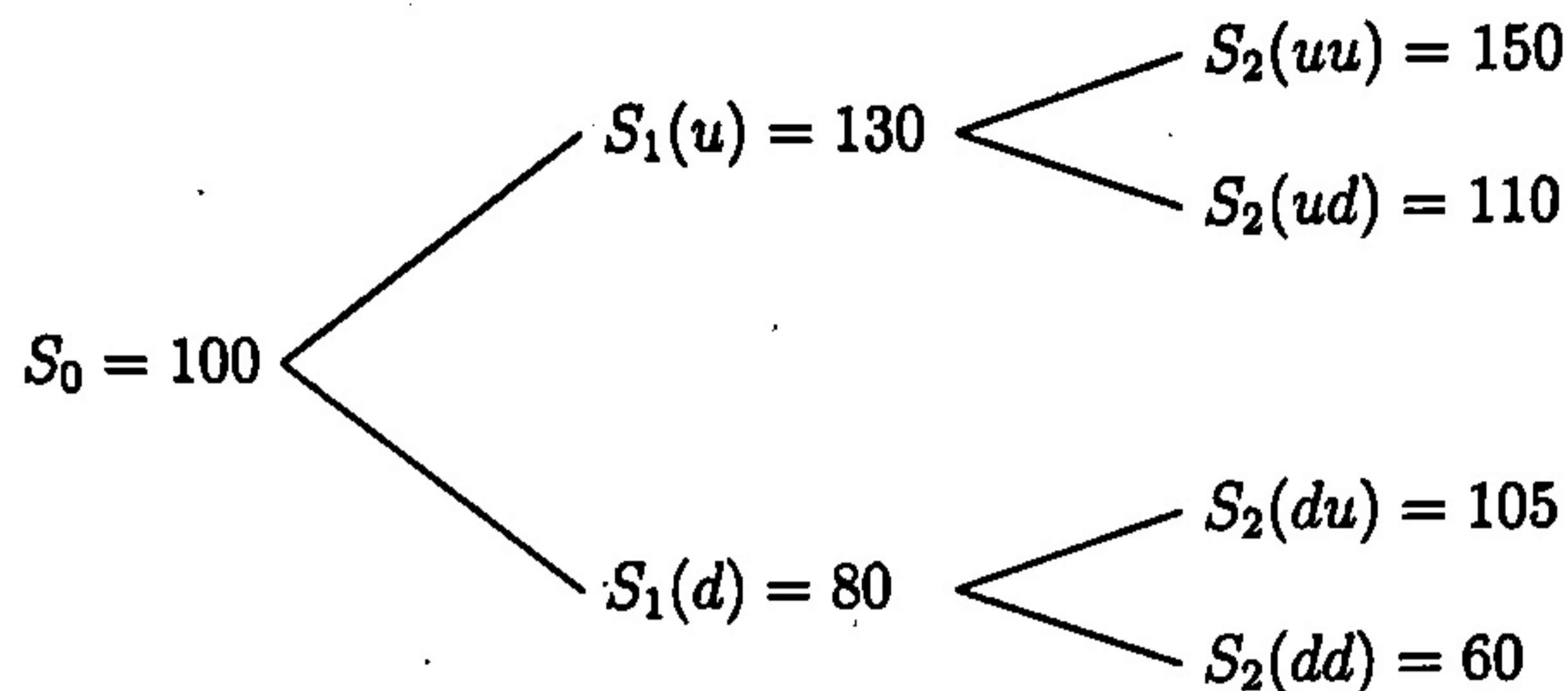
Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit normiertem risikolosem Wertpapier, d.h. $B_0 = 1$, mit Zinssatz $r = 0.1$. Zusätzlich existiere eine Aktie S mit folgendem Aktienpreisverlauf:



- Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an, welcher alle möglichen Pfade des Aktienpreises enthält.
- Sei $a = 10$. Wählen Sie einen Wert für b , sodass Arbitrage entsteht und geben Sie eine Arbitragestrategie an.
- Sei $b = 7$. Wählen Sie (mit Begründung!) einen Wert für a , sodass der Finanzmarkt arbitragefrei ist.
- Sei nun $a = 10$ und $b = 7$. Gibt es auf diesem Finanzmarkt erreichbare Zahlungsansprüche? Falls nein, begründen Sie warum nicht. Falls ja, geben Sie einen erreichbaren Zahlungsanspruch an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Betrachten Sie folgenden zweiperiodigen Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit normiertem risikolosem Wertpapier, d.h. $B_0 = 1$, mit Zinssatz $r = 0.05$. Es existiere eine Aktie S mit Aktienpreisverlauf



a) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathcal{M}^* an.

Nun sei auf dem Markt ein Amerikanischer Put mit Basispreis $K = 90$ gegeben.

b) Skizzieren Sie den Auszahlungsprozess des Puts.

c) Bestimmen Sie den fairen Preis des Puts zur Zeit $t = 0$. Wie sieht die optimale Ausübungsstrategie aus?

d) Bestimmen Sie eine Hedging-Strategie bis zur Ausübung.

e) Betrachten Sie nun die amerikanische Digital-Call-Option $D_t := \mathbf{1}_{\{S_t > K\}}$ mit Basispreis $K = 100$. Geben Sie mit kurzer Begründung die optimale Ausübungsstrategie der Option an.

(Hinweis: Dazu müssen Sie nicht die Snell-Einhüllende berechnen.)

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreies, T-periodiges CRR-Modell und eine Aktie. Betrachten Sie das Portfolio-Problem

$$(P) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi} \mathbb{E} \left[\sqrt{V_T^{\varphi}} \right] \\ V_0^{\varphi} = \nu_0 \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Lösen Sie dieses Portfolio-Problem mit Hilfe der dynamischen Programmierung. Zeigen Sie, dass dabei für die Wertfunktion J_t und die optimale Anlagepolitik $(f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$ das Folgende gilt:

$$J_t(x) = d_t \sqrt{x} \text{ für ein } d_t > 0 \text{ für alle } t \in \{0, \dots, T\},$$

sowie

$$f_t^*(x) = \alpha_t^* x \text{ für ein } \alpha_t^* \in \mathbb{R} \text{ für alle } t \in \{0, \dots, T-1\}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Nun seien X_1, \dots, X_n und Y_1, \dots, Y_n Folgen von jeweils unabhängigen Zufallsvariablen mit Werten in $(0, \infty)$.

- a) Geben Sie die Definition sowie eine äquivalente Charakterisierung der stochastischen Dominanz $Y_1 \succ_{FSD} X_1$ an.
- b) Zeigen Sie, dass gilt

$$Y_i \succ_{FSD} X_i, \quad i = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^n Y_i \succ_{FSD} \prod_{i=1}^n X_i.$$

- c) Gegeben sei ein arbitragefreies, T -periodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit Parametern $d < 1 + \tau < u$ und eine europäische Option mit Auszahlung $H = B_T \cdot \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}}$. Zeigen Sie mithilfe von b):
Der Preis von H ist monoton wachsend im risikolosen Zinssatz τ .

Aufgabe 6 (5 Punkte)

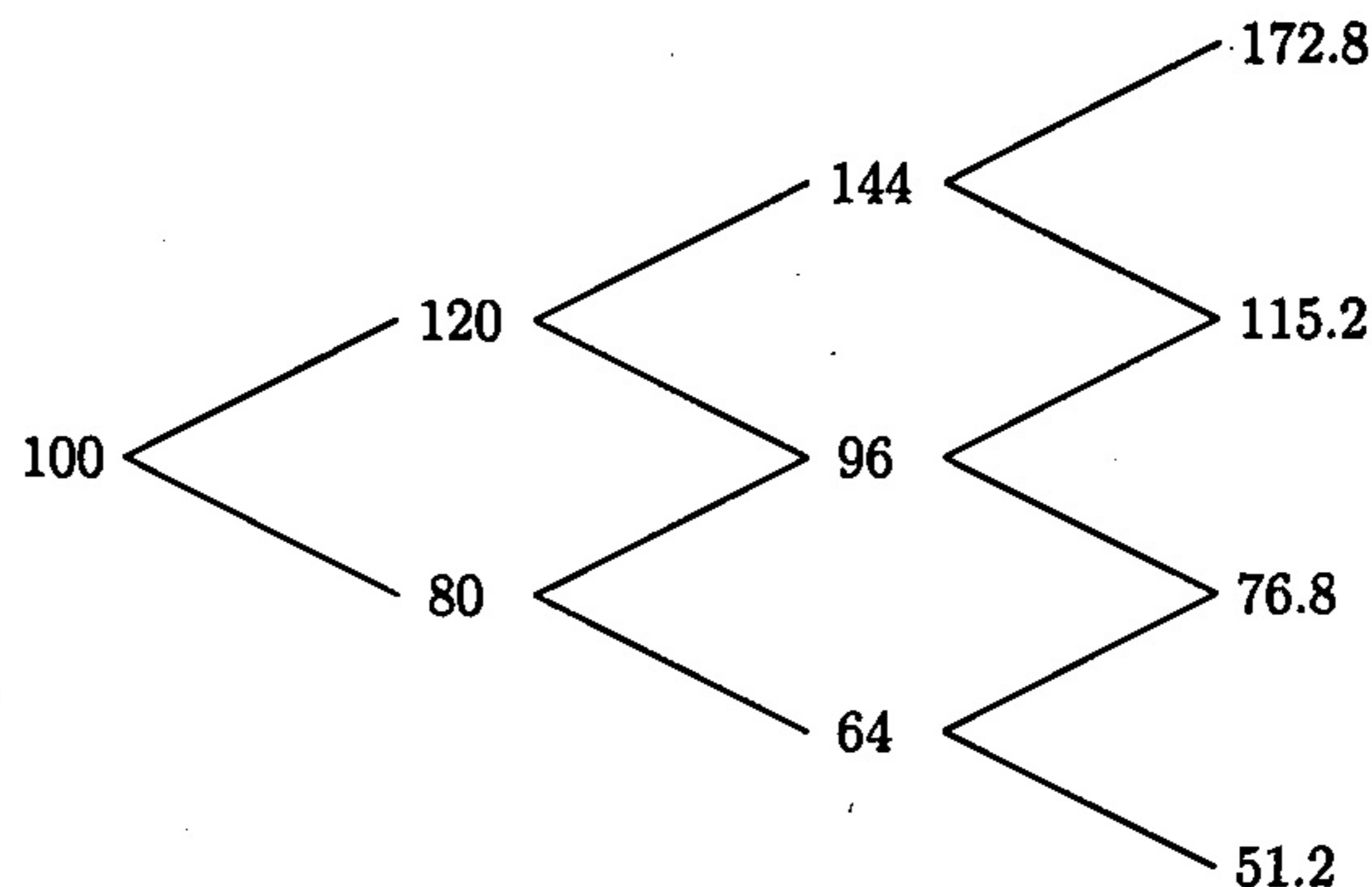
Sei $(\rho_i, i \in I)$ eine Familie von kohärenten monetären Risikomaßen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum.

- a) Zeigen Sie, dass $\sup_{i \in I} \rho_i$ ebenfalls ein kohärentes monetäres Risikomaß ist.
- b) Geben Sie eine Definition des Average-Value-at-Risk an.
- c) Sei ρ_i jetzt der Average-Value-at-Risk zum Niveau $\lambda_i \in (0, 1)$ mit $i \in I = \{1, \dots, n\}$ und $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < 1$. Geben Sie hier eine möglichst explizite Darstellung von $\sup_{i \in I} \rho_i$ an.

Aufgabe 1

a) Der Markt ist arbitragefrei, da gilt $d < 1 + r < u$.

b)



c) Wir verwenden die risikoneutrale Bewertungsformel. Zunächst ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß bestimmt durch

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{3}{4}$$

Die Auszahlungen der Option in den verschiedenen Marktzuständen zum Endzeitpunkt sind

$$\begin{aligned} H(uuu) &= 72.8 & H(uud) &= 15.2 & H(udu) &= 19.2 & H(udd) &= 0 \\ H(duu) &= 35.2 & H(dud) &= 0 & H(ddu) &= 12.8 & H(ddd) &= 0. \end{aligned}$$

Damit kann nun mit der risikoneutralen Bewertungsformel der faire Preis der Option berechnet werden:

$$\begin{aligned} \pi(H) &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{H}{B_3} \right] = \frac{1}{1.1^3} \left(72.8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + (15.2 + 19.2 + 35.2) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + 12.8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \\ &= 30.88. \end{aligned}$$

d) Wir berechnen zunächst mithilfe der risikoneutralen Bewertungsformel die fairen Preise der Option zum Zeitpunkt $t = 1$.

$$\begin{aligned} \pi_1(H)(u) &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1 \right] (u) = \frac{1}{1.1^2} \left(72.8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + (15.2 + 19.2) \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = 39.17, \\ \pi_1(H)(d) &= \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1 \right] (d) = \frac{1}{1.1^2} \left(35.2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 12.8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = 18.35. \end{aligned}$$

Für die Hedging-Strategie muss zum Zeitpunkt $t = 0$ nun folgendes LGS erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(u) \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(d) \end{aligned}$$

$$\iff$$

$$120\alpha_0 + 1.1\beta_0 = 39.17$$

$$80\alpha_0 + 1.1\beta_0 = 18.35$$

$$\iff$$

$$(\alpha_0, \beta_0) = (0.5205, -21.173).$$

Aufgabe 2

- a) Zum Beispiel $\Omega = \{uu, um, ud, du, dd\}$.
- b) Setze zum Beispiel $b = 4$. Dann ist eine Arbitragestrategie gegeben durch

$$\varphi = ((\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1(u), \beta_1(u)), (\alpha_1(d), \beta_1(d))),$$

wobei

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_1(u) = \beta_1(u) = 0, \quad \alpha_1(d) = -1, \quad \beta_1(d) = \frac{5}{1.1}.$$

- c) Wähle zum Beispiel $a = 10$. Berechnet man die Menge der äquivalenten Martingal-
maße, ergibt sich mit $q := q(d|u)$ als freier Variable

ω	$Q(\{\omega\})$
uu	$\frac{5+7q}{15}$
um	$\frac{1-13q}{15}$
ud	$\frac{2}{5}q$
du	$\frac{21}{50}$
dd	$\frac{9}{50}$

Insgesamt erhalten wir also $q \in (0, \frac{1}{13})$.

Damit gilt nun

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \left(\frac{5+7q}{15}, \frac{1-13q}{15}, \frac{2}{5}q, \frac{21}{50}, \frac{9}{50} \right) \mid q \in \left(0, \frac{1}{13} \right) \right\}.$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Optionspreistheorie ist der Finanzmarkt arbitragefrei, nach dem 2. Hauptsatz ist er jedoch nicht vollständig.

- d) Ist ein Finanzmarkt nicht vollständig, bedeutet das nicht, dass kein Zahlungsanspruch erreichbar ist. Wähle zum Beispiel einfach den Zahlungsanspruch $H_2 \equiv B_2$. Dann ist eine Hedging-Strategie gegeben durch

$$\alpha_0 = \alpha_1(u) = \alpha_1(d) = 0, \quad \beta_0 = \beta_1(u) = \beta_1(d) = 1.$$

Aufgabe 3

- a) Das eindeutige äquivalente Martingalmaß ist bestimmt durch

$$q(u|u) = \frac{53}{80}, \quad q(d|u) = \frac{27}{80}, \quad q(u|d) = \frac{8}{15}, \quad q(d|d) = \frac{7}{15}$$

$$q(u) = \frac{1}{2}, \quad q(d) = \frac{1}{2}.$$

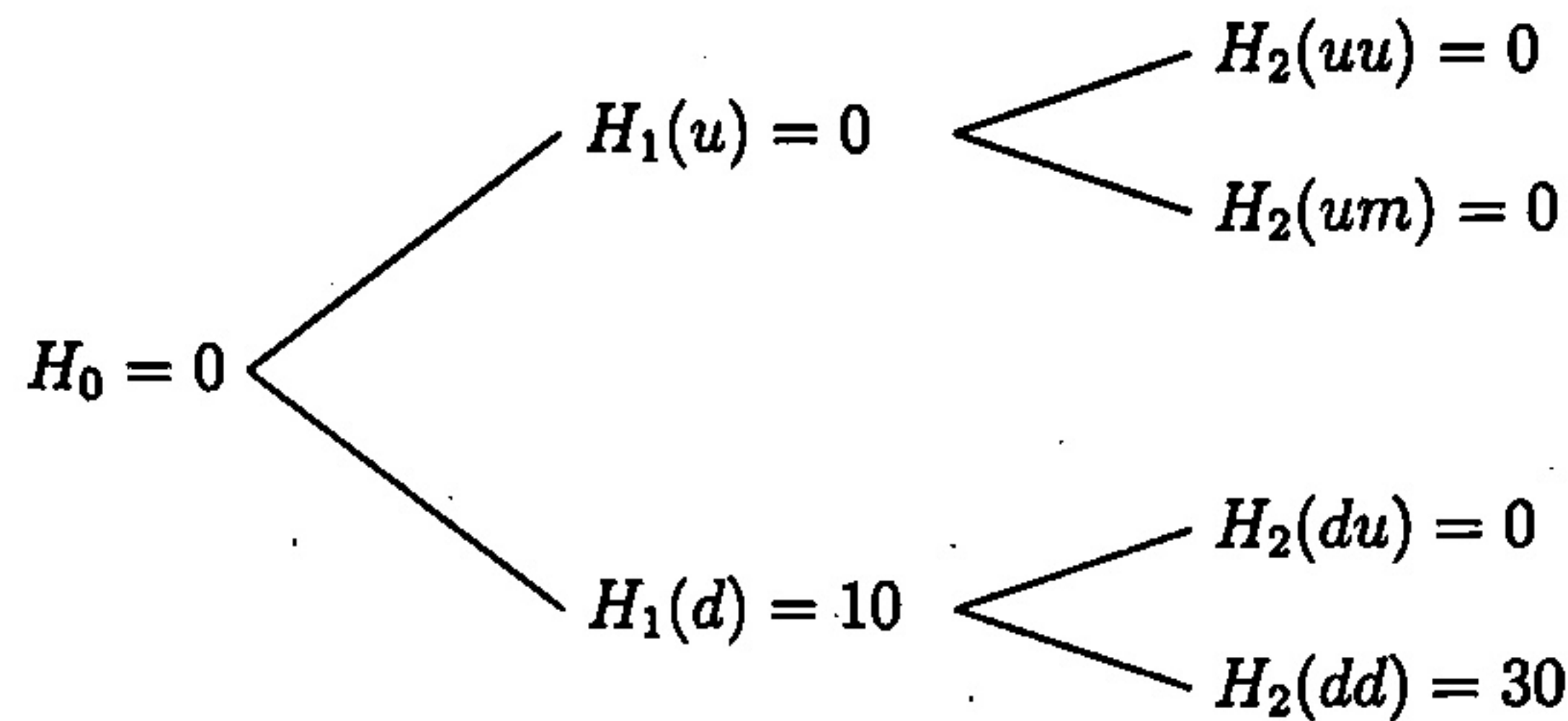
Es gilt also

$$Q(\{uu\}) = \frac{53}{160}, \quad Q(\{ud\}) = \frac{27}{160}, \quad Q(\{du\}) = \frac{4}{15}, \quad Q(\{dd\}) = \frac{7}{30}$$

und damit

$$\mathcal{M}^* = \{Q\}.$$

b)



c) Berechne die Snell-Einhüllende von $\left(\frac{H_t}{B_t}\right)_{t=0,1,2}$.

$$Z_2(uu) = \frac{H_2(uu)}{B_2} = 0, \quad Z_2(ud) = Z_2(du) = 0, \quad Z_2(dd) = \frac{4000}{147}$$

$$Z_1(u) = \max \left\{ \frac{H_1(u)}{B_1}, \mathbb{E}_Q[Z_2 | \mathcal{F}_1](u) \right\} = 0$$

$$Z_1(d) = \max \left\{ \frac{10}{1.05}, \frac{7}{15} \cdot \frac{4000}{147} \right\} = \frac{800}{63}$$

$$Z_0 = \max \left\{ \frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_Q[Z_1 | \mathcal{F}_0] \right\} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \cdot \frac{800}{63} \right\} = \frac{400}{63}$$

Die optimale Ausübungsstrategie im Fall $D = 1$ ist demnach gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 2, & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

d) Wir suchen eine Hedgingstrategie $\varphi = ((\alpha_0, \beta_0), (\alpha_1(u), \beta_1(u)), (\alpha_1(d), \beta_1(d)))$. Offensichtlich ist $\alpha_1(u) = \beta_1(u) = 0$, und damit auch $V_1^\varphi(u) = 0$. Im unteren Teilbaum ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$105\alpha_1(d) + 1.05^2\beta_1(d) = 0$$

$$60\alpha_1(d) + 1.05^2\beta_1(d) = 30$$

$$\iff (\alpha_1(d), \beta_1(d)) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{4000}{63}\right).$$

Damit gilt $V_1^{\varphi}(d) = -\frac{2}{3} \cdot 80 + \frac{4000}{63} \cdot 1.05 = \frac{40}{3}$.

Vorderer Teilbaum:

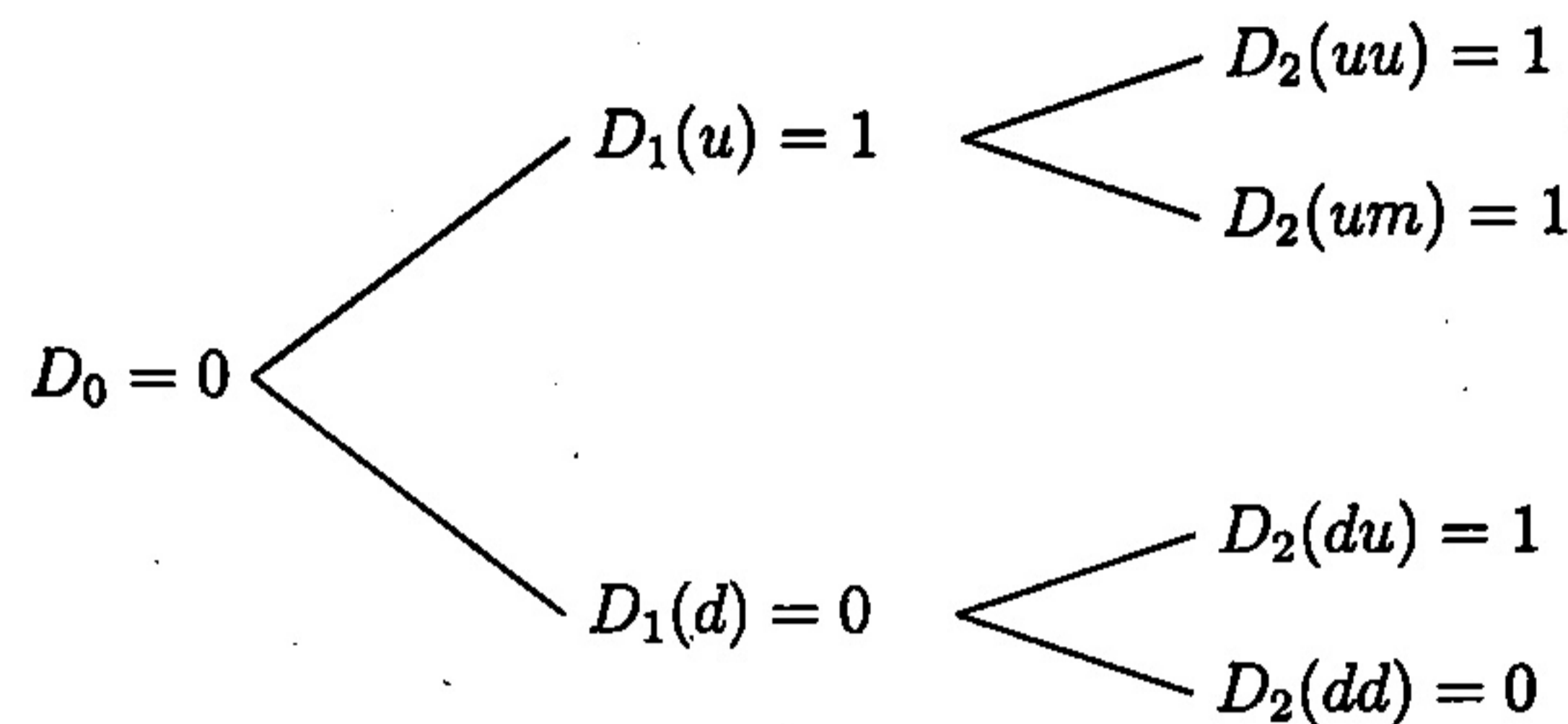
$$130\alpha_0 + 1.05\beta_0 = 0$$

$$80\alpha_0 + 1.05\beta_0 = \frac{40}{3}$$

$$\iff (\alpha_0, \beta_0) = \left(-\frac{4}{15}, \frac{2080}{63}\right).$$

Probe: $\pi(H) = V_0^{\varphi} = -\frac{4}{15} \cdot 100 + \frac{2080}{63} = \frac{400}{63}$

e) Das Auszahlungsprofil der Option ist gegeben durch



Demnach ist die optimale Ausübungsstrategie offensichtlich

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 2, & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

Aufgabe 4

Nach der Vorlesung gilt die folgende Re-

kursionsformel:

$$J_t = \mathcal{T}_t J_{t+1}, \quad t = T - 1, \dots, 0,$$

wobei

$$J_T(x) = U(x),$$

$$(\mathcal{T}_t J_{t+1})(x) = \sup_{f \in \mathbb{R}^d} ((\mathcal{T}_{t+1} J_{t+1})(x)),$$

mit

$$(\mathcal{T}_{t+1} J_{t+1})(x) = \mathbb{E}[J_{t+1}((1 + r_{t+1})(x + f(x)R_{t+1}))].$$

In unserem Fall gilt $r_t = r$ sowie $d = 1$, also $f \in \mathbb{R}$. Nach dem Theorem über die Bellman-Gleichung aus der Vorlesung gilt ebenfalls, dass es Entscheidungsregeln $f_t^* \in \mathbb{R}$ geben muss, sodass

$$\mathcal{T}_{t+1} J_{t+1} = \mathcal{T}_t J_{t+1}$$

für alle Zeitpunkte $t = T - 1, \dots, 0$ gilt und $(f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$ eine optimale Anlagepolitik ist.

Nach Obigem lässt sich J_t wie folgt rekursiv herleiten:

$$J_T(x) = U(x) = \sqrt{x}.$$

Somit setzen wir $d_T := 1$. Weiter ergibt sich nach der Bellman-Gleichung:

$$\begin{aligned}
 J_{T-1}(x) &= \sup_{f \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [J_T((1+r)(x + f(x)R_T))] = \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\sqrt{(1+r)(x + aR_T)} \right] \\
 &= \sqrt{1+r} \sup_{f \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\sqrt{(x + aR_T)} \right] = \sqrt{1+r} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\sqrt{(1 + \alpha R_T)} \right] \sqrt{x} \\
 &=: d_{T-1} \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Wir zeigen die Behauptung nun durch Rückwärtsinduktion. Der Induktionsanfang wurde für $t = T$ bzw. $t = T - 1$ bereits oben gezeigt.

Induktionsvoraussetzung (IV):

Für ein festes, aber beliebiges t gelte $J_{t+1} = d_{t+1} \sqrt{x}$ sowie $d_{t+1} > 0$. Dann ergibt sich

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
 J_t(x) &= \sup_f \mathbb{E} [J_{t+1}((1+r)(x + f(x)R_{t+1}))] \stackrel{(IV)}{=} \sup_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[d_{t+1} \sqrt{(1+r)(x + aR_{t+1})} \right] \\
 &= d_{t+1} \sqrt{1+r} \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[\sqrt{1 + \alpha R_{t+1}} \right] \sqrt{x} := d_t \sqrt{x}
 \end{aligned}$$

Somit folgt insbesondere $d_t > 0$ und somit der erste Teil der Behauptung. Für die optimale Strategie ergibt sich nach Definition von α dann gerade (vgl. auch Beispiel 10.13 im Skript):

$$f_t^* = a^* = \alpha_t^* x.$$

Somit folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

a) Zeige die Aussage durch Induktion: Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für $k = 1, \dots, n$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} [f(X_1 \cdot \dots \cdot X_n \cdot X_{n+1})] &= \int \dots \int \mathbb{E} [f(x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot X_{n+1})] \mathbb{P}(dx_1, \dots, dx_n) \\
 &\stackrel{(*)}{\leq} \int \dots \int \mathbb{E} [f(x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot Y_{n+1})] \mathbb{P}(dx_1, \dots, dx_n) \\
 &= \mathbb{E} [f(X_1 \cdot \dots \cdot X_n \cdot Y_{n+1})] = \int \mathbb{E} [f(X_1 \cdot \dots \cdot X_n \cdot y)] \mathbb{P}(dy) \\
 &\stackrel{IH}{\leq} \int \mathbb{E} [f(Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n \cdot y)] \mathbb{P}(dy) \\
 &= \mathbb{E} [f(Y_1 \cdot \dots \cdot Y_n \cdot Y_{n+1})]
 \end{aligned}$$

Bei (*) wird verwendet, dass $Y_{n+1} \succ_{FSD} X_{n+1}$ und dass die Funktion $x \mapsto f(x_1 \cdot \dots \cdot x_n \cdot x)$ monoton wachsend ist.

b) Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ für den Zustand u ist monoton wachsend in r . Sei also $r \leq r'$ mit $d < 1+r \leq 1+r' < u$. Wegen $q \leq q' := \frac{1+r'-d}{u-d}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
 &Y_i' \succ_{FSD} Y_i, \quad \text{wobei} \\
 Y_i &= \begin{cases} u, & \text{mit WK } q, \\ d, & \text{mit WK } 1 - q. \end{cases} & Y_i' &= \begin{cases} u, & \text{mit WK } q', \\ d, & \text{mit WK } 1 - q'. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit folgt mit der Monotonie der Indikatorfunktion

$$\begin{aligned}\pi_r(H) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{H}{B_T} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{B_T \cdot \mathbf{1}_{\{S_0, Y_1, \dots, Y_T \geq K\}}}{B_T} \right] \\ &\stackrel{a)}{\leq} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'} \left[\frac{B'_T \cdot \mathbf{1}_{\{S_0, Y'_1, \dots, Y'_T \geq K\}}}{B'_T} \right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}'} \left[\frac{H}{B'_T} \right] = \pi_{r'}(H).\end{aligned}$$

Aufgabe 6

- a) Nachzuprüfen sind Monotonie, Translationsinvarianz, positive Homogenität und Subadditivität (oder Konvexität).

Monotonie: $X \leq Y \Rightarrow \rho_i(X) \geq \rho_i(Y)$ für alle $i \in I$ und damit

$$\sup_{i \in I} \rho_i(X) \geq \sup_{i \in I} \rho_i(Y).$$

Translationsinvarianz: Für $c \in \mathbb{R}$ gilt: $\rho_i(X + c) = \rho_i(X) - c$ für alle $i \in I$ und damit

$$\sup_{i \in I} \rho_i(X + c) = \left(\sup_{i \in I} \rho_i(X) \right) - c.$$

Positive Homogenität: Für $\alpha > 0$ gilt: $\rho_i(\alpha X) = \alpha \rho_i(X)$ für alle $i \in I$ und damit

$$\sup_{i \in I} \rho_i(\alpha X) = \alpha \left(\sup_{i \in I} \rho_i(X) \right).$$

Subadditivität: Es gilt: $\rho_i(X + Y) \leq \rho_i(X) + \rho_i(Y)$ für alle $i \in I$ und damit

$$\sup_{i \in I} \rho_i(X + Y) \leq \sup_{i \in I} \rho_i(X) + \rho_i(Y) \leq \sup_{i \in I} \rho_i(X) + \sup_{i \in I} \rho_i(Y).$$

- b) Definition *AVaR* siehe Vorlesung.

- c) Da der Average-Value-at-Risk zum Niveau λ fällt (gilt für $-VaR$ und damit für den Durchschnitt), ist $\sup_{i \in I} \rho_i(X) = AVaR_{\lambda_1}$