

Fasen-Hartmann
Finanzmathematik

Dauer: 120 min.
Bemerkungen: Taschenrechner

Lösung: offiziell

Bestanden mit: 16 P.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Cox-Ross-Rubinstein-Finanzmarkt mit normiertem risikolosem Bond mit Preisprozess $B_t = 1$ für $t = 0, 1, 2$ und einer Aktie mit Preisprozess $(S_t)_{t=0,1,2}$ mit $S_0 = 10$. Es sei $\Omega = \{u, d\}^2$, wobei $d = \frac{1}{u}$ und $u > 1$. Weiter sei der Zahlungsanspruch H ein europäischer Call mit Fälligkeit $T = 2$ und Strikepreis $K = 10$.

- Untersuchen Sie den Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.
- Zeigen Sie, dass für den Preis $\pi_0^E(H)$ des europäischen Calls H zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ in Abhängigkeit von u gilt:

$$\pi_0^E(H) = 10 \frac{u-1}{u+1}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein endlicher Finanzmarkt.

- Welchen Zusammenhang gibt es zwischen den Preisen von einem europäischen Call und einem europäischen Put auf eine identische Aktie S mit gleichem Strikepreis K und gleicher Fälligkeit T , wenn der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist?
- Es sei ein europäischer Call mit Preis $\pi_0^E(C)$ und ein europäischer Put mit Preis $\pi_0^E(P)$ auf die identische Aktie mit gleichem Strikepreis K und Fälligkeit in $T = 1$ zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben. Weiter gelte $K = 20$, $\pi_0^E(C) = 3$, $\pi_0^E(P) = 3$, $r = 0.25$ und $S_0 = 19$. Gibt es Arbitragemöglichkeiten? Falls ja, geben Sie diese an.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ und $\mathbb{P}(\{\omega_k\}) > 0$, $k = 1, \dots, 4$, einem zinslosen und normierten risikolosen Wertpapier $B = (B_0, B_1)$ und zwei Aktien $S^1 = (S_0^1, S_1^1)$ und $S^2 = (S_0^2, S_1^2)$. Die Aktie S^1 hat zu Beginn einen Wert von $S_0^1 = 4$ Geldeinheiten und Aktie S^2 hat zu Beginn einen Wert von $S_0^2 = 9$ Geldeinheiten. Die Entwicklung der Aktien sei wie folgt

$$S_1^1(\omega) = \begin{cases} 6, & \omega = \omega_1 \\ 2, & \omega = \omega_2 \\ 2, & \omega = \omega_3 \\ 7, & \omega = \omega_4 \end{cases}, \quad S_1^2(\omega) = \begin{cases} 9, & \omega = \omega_1 \\ 13, & \omega = \omega_2 \\ 1, & \omega = \omega_3 \\ 14, & \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Zudem sei eine europäische Option $H = (S_1^1 - S_1^2)_+$ gegeben.

- Bestimmen Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathcal{Q}^* .

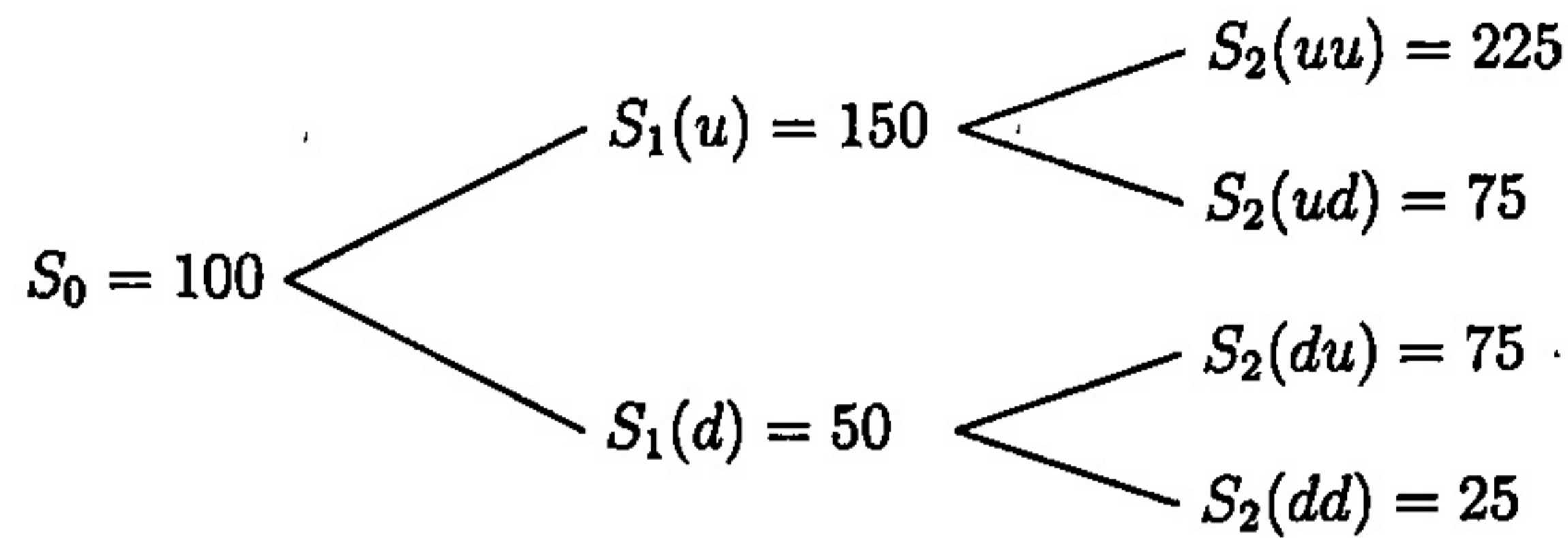
Hinweis: Zeigen Sie

$$\mathcal{Q}^* \subseteq \{Q = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}q, q_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}q, q_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q, q_4 = q, q \in \mathbb{R}\}.$$

- Untersuchen Sie den Markt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.
- Bestimmen Sie alle arbitragefreien Preise für H .

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreier und vollständiger zweiperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem normiertem Bond $B = (B_t)_{t=0,1,2}$ mit Zinssatz $r = 0.25$. Zusätzlich existiere eine Aktie mit folgendem Aktienpreisverlauf:



Eine amerikanische Bonusoption sei definiert durch

$$H_t = \begin{cases} S_t + 25 \cdot \mathcal{K}, & S_t \geq 200 \text{ und } S_i \geq 50 \text{ für alle } i \leq t, \\ 25 \cdot \mathcal{K}, & 50 \leq S_t < 200 \text{ und } S_i \geq 50 \text{ für alle } i \leq t, \\ 0, & S_i < 50 \text{ für ein } i \leq t, \end{cases} \quad t = 0, 1, 2.$$

wobei $0 < \mathcal{K} < 10$.

- Bestimmen Sie das eindeutige äquivalente Martingalmaß.
- Zeigen Sie, dass $\pi_0^A(H) = 81 + 17 \cdot \mathcal{K}$ der eindeutige faire Preis der amerikanischen Bonusoption zur Zeit $t = 0$ ist.
- Geben Sie die optimale Ausübungsstrategie für die amerikanische Bonusoption an.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Peter und Paul gehen auf den Jahrmarkt, wo folgendes Spiel A angeboten wird. In einer Urne sind 3 Kugeln, die mit den Zahlen 0, 50 und 100 beschriftet sind. Rein zufällig wird eine Kugel aus der Urne gezogen, wobei jede Kugel die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gezogen zu werden. Der Spieler erhält als Geldgewinn die Zahl auf der gezogenen Kugel in EUR. Peter hat die Nutzenfunktion $U(x) := \log(\sqrt{1+x})$ für $x \geq 0$.

- Wie viel wäre Peter mit Nutzenfunktion $U(x)$ maximal bereit zu zahlen, um an dem Spiel teilnehmen zu können?
- Es wird noch ein zweites Spiel B angeboten, bei dem die Kugeln mit den Zahlen 0, 50, 100 aus einer Urne mit folgenden Wahrscheinlichkeiten

ω	0	50	100
$\mathbb{Q}(\{\omega\})$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

gezogen werden. Paul ist ein risikoaverser Spieler mit monotoner Präferenz, dessen Nutzenfunktion nicht explizit bekannt ist. Wird Paul Spiel A oder Spiel B vorziehen?

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreier und vollständiger endlicher Finanzmarkt mit T -Perioden und normiertem Bond $B = (B_t)_{t=0, \dots, T}$. Weiter sei die Nutzenfunktion $U : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$U(x) = -\frac{1}{2x^2}$$

und ein Anfangsvermögen $v_0 > 0$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\max_{\substack{\varphi \in \Phi \\ V_0^\varphi = v_0}} \mathbb{E}(U(V_T^\varphi)) = -\frac{1}{2} v_0^{-2} B_T^{-2} [\mathbb{E}(L^{2/3})]^3$$

wobei $L = \frac{dQ}{dP}$ ist.

Aufgabe 1

Lösungsvorschlag: (1.5+3.5 Punkte)

a) Arbitragefreiheit und Vollständigkeit im CRR-Finanzmarkt liegt vor, falls gilt

$$d < 1 + r < u.$$

Da $u > 1$ folgt $\frac{1}{u} < 1 + r = 1 < u$ und somit ist der Markt arbitragefrei und vollständig.

b) Aufgrund des CRR-Modells können wir das äquivalente Martingalmaß direkt berechnen. Es gilt

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1 - \frac{1}{u}}{u - \frac{1}{u}} = \frac{u - 1}{u^2 - 1} = \frac{1}{u + 1}.$$

Die Auszahlung der Calls H ist $H = (S_T - K)_+$. Mit der Bewertungsformel folgt für den Preis des Calls

$$\begin{aligned} \pi_0^E(H) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] \\ &= q^2(u^2 S_0 - K)_+ + 2q(1 - q)(S_0 - K)_+ + (1 - q)^2\left(\frac{1}{u}10 - K\right)_+ \\ &= \frac{1}{(u + 1)^2}(10u^2 - 10) \\ &= 10 \frac{(u - 1)(u + 1)}{(u + 1)^2} \\ &= 10 \frac{u - 1}{u + 1}. \end{aligned}$$

Zudem muss $\pi_0^E(H) > 0$ gelten, da $u > 1$ ist.

Aufgabe 2

Lösungsvorschlag: (2+3 Punkte)

a) Es gilt die Put-Call-Parität, welche besagt

$$\pi_0^E(C) + \frac{K}{B_T} = \pi_0^E(P) + S_0.$$

b) Nach der Put-Call-Parität müsste gelten, dass der Preis des Calls

$$3 = \pi_0^E(C)$$

mit
$$\pi_0^E(P) + S_0 - \frac{K}{B_T} = 3 + 19 - 16 = 6$$

übereinstimmt. Jedoch ist der tatsächliche Preis des Calls niedriger, sodass dieser unterbewertet ist. Eine mögliche Strategie ist, den Call zu kaufen und ein Portfolio, welches den Call repliziert, zu verkaufen. Die Differenz wird risikolos angelegt. Damit ergibt sich folgende Tabelle

Strategie	Zeit 0	Zeit T
kaufe Call	$-\pi_0(C)$	$(S_T - K)^+$
verkaufe Put	$\pi_0(P)$	$-(K - S_T)^+$
verkaufe Aktie	S_0	$-S_T$
kaufe risikolose Anlage	$-\frac{1}{B_T}K - 3$	$K + 3B_T$
Bilanz	$-3 + 3 + 19 - 16 - 3 = 0$	in jedem Fall > 0

Also gibt es eine Arbitragemöglichkeit, welche der obigen Strategie entspricht.

Aufgabe 3

Lösungsvorschlag: (4+1+4 Punkte)

- a) Wir berechnen im Folgenden die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Dabei sei $q_i = \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Für ein äquivalentes Martingalmaß muss gelten

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + q_3 + q_4 &= 1, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^1 | \mathcal{F}_0] &= S_0^1, \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_1^2 | \mathcal{F}_0] &= S_0^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das folgende LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 7 \\ 9 & 13 & 1 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Lösen des LGS ergibt

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -8 & 5 & 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -12 & 6 & -2 \end{array} \right).$$

Als Lösung ergibt sich mit der freien Variable $q_4 = q$

$$q_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}q, \quad q_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}q, \quad q_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q, \quad q_4 = q.$$

Zusätzlich muss gelten $q_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Also

$$\begin{aligned} q_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}q \in (0, 1) &\Leftrightarrow q \in \left(-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right) \\ q_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}q \in (0, 1) &\Leftrightarrow q \in \left(-\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ q_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q \in (0, 1) &\Leftrightarrow q \in \left(-\frac{2}{6}, \frac{10}{6}\right) \\ q_4 = q &\in (0, 1). \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $q \in (0, \frac{2}{5})$. Somit ist die Menge aller äquivalenten Martingalmaße gleich

$$\mathcal{Q}^* = \left\{ \mathbb{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4) : q_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{4}q, q_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}q, q_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q, q_4 = q, q \in (0, \frac{2}{5}) \right\}.$$

- b) Da $|\mathcal{Q}^*| > 1$ folgt aus dem ersten und zweiten Hauptsatz, dass der Markt arbitragefrei und nicht vollständig ist.

- c) Die Auszahlung der Option zum Endzeitpunkt ist

$$H(\omega) = \begin{cases} (6 - 9)_+ = 0, & \omega = \omega_1 \\ (2 - 13)_+ = 0, & \omega = \omega_2 \\ (2 - 1)_+ = 1, & \omega = \omega_3 \\ (7 - 14)_+ = 0, & \omega = \omega_4. \end{cases}$$

Die Preisschranken der arbitragefreien Preise von der Option H sind

$$\pi_-(H) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_1] \quad \text{und} \quad \pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H_1].$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] &= q_1 \cdot H(\omega_1) + q_2 \cdot H(\omega_2) + q_3 \cdot H(\omega_3) + q_4 \cdot H(\omega_4) \\ &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}q\right) \cdot 1 \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q.\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\pi_-(H) &= \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] = \inf_{q \in (0, \frac{2}{5})} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q \right\} = \frac{1}{6}, \\ \pi_+(H) &= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[H] = \sup_{q \in (0, \frac{2}{5})} \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}q \right\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{11}{30} = \frac{11}{30}.\end{aligned}$$

Somit ist die Menge der arbitragefreien Preise von H das Intervall $(\frac{1}{6}, \frac{11}{30})$.

Aufgabe 4

Lösungsvorschlag: (2+5.5+1.5 Punkte)

- a) Der Finanzmarkt entspricht einem CRR-Modell mit $u = 1.5, d = 0.5, r = 0.25$.
Damit folgt

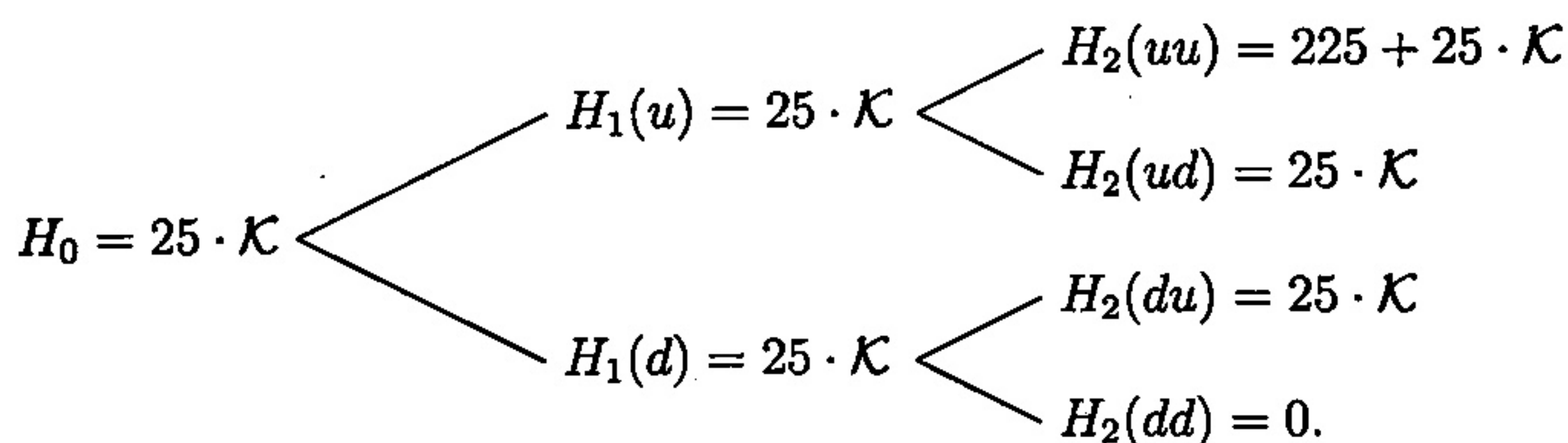
$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{3}{4}$$

und $\mathbb{Q}(\{(u, u)\}) = \frac{9}{16}$, $\mathbb{Q}(\{(u, d)\}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = \mathbb{Q}(\{(d, u)\})$ und $\mathbb{Q}(\{(d, d)\}) = \frac{1}{16}$.

- b) Bemerke

$$B_0 = 1, B_1 = 5/4, B_2 = 25/16.$$

Die Auszahlung der Option ist in dem folgenden Baum dargestellt



Wir bestimmen den fairen Preis der Option zur Zeit $t = 0$ durch die Berechnung der Snell-Einhüllenden $(Z_t)_{t=0,1,2}$ zu dem Prozess $(H_t/B_t)_{t=0,1,2}$.

Für $t = 2$ gilt $Z_2 = \frac{H_2}{B_2}$ und somit $Z_2(uu) = \frac{H_2(uu)}{B_2} = \frac{225+25 \cdot \mathcal{K}}{5^2/4^2} = 144 + 16 \cdot \mathcal{K}$, $Z_2(ud) = \frac{H_2(ud)}{B_2} = \frac{25 \cdot \mathcal{K}}{25/16} = 16 \cdot \mathcal{K}$, $Z_2(du) = \frac{H_2(du)}{B_2} = 16 \cdot \mathcal{K}$, $Z_2(dd) = \frac{H_2(dd)}{B_2} = 0$.

Für $t = 1$ gilt

$$Z_1 = \max\left\{ \frac{H_1}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 | \mathcal{F}_1] \right\}.$$

Also

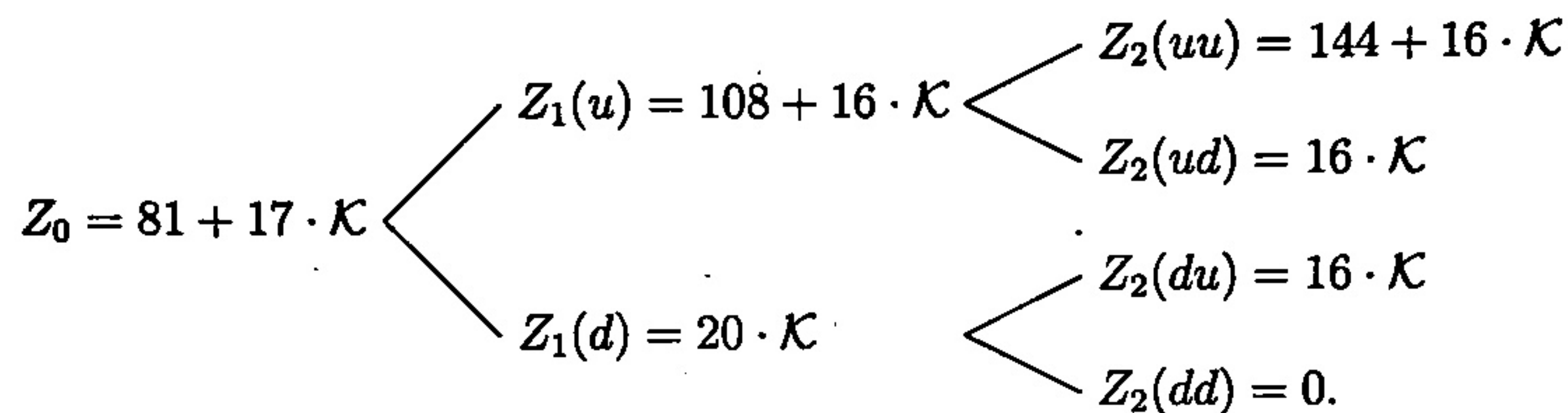
$$\begin{aligned}Z_1(u) &= \max\left\{ \frac{H_1(u)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 | \mathcal{F}_1](u) \right\} \\ &= \max\left\{ 20 \cdot \mathcal{K}, \frac{3}{4}(144 + 16 \cdot \mathcal{K}) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)16 \cdot \mathcal{K} \right\} \\ &= \max\{20 \cdot \mathcal{K}, 108 + 16 \cdot \mathcal{K}\} \\ &= 108 + 16 \cdot \mathcal{K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1(d) &= \max\left\{\frac{H_1(d)}{B_1}, \mathbb{E}_Q[Z_2|\mathcal{F}_1](d)\right\} \\ &= \max\left\{20 \cdot \mathcal{K}, \frac{3}{4}16 \cdot \mathcal{K} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)0\right\} \\ &= \max\{20 \cdot \mathcal{K}, 12 \cdot \mathcal{K}\} \\ &= 20 \cdot \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt

$$\begin{aligned} Z_0 &= \max\left\{\frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_Q[Z_1|\mathcal{F}_0]\right\} \\ &= \max\left\{25 \cdot \mathcal{K}, \frac{3}{4}(108 + 16 \cdot \mathcal{K}) + \left(1 - \frac{3}{4}\right)20 \cdot \mathcal{K}\right\} \\ &= \max\{25 \cdot \mathcal{K}, 81 + 17 \cdot \mathcal{K}\} \\ &= 81 + 17 \cdot \mathcal{K}. \end{aligned}$$

Der Prozess $(Z_t)_{t=0,1,2}$ hat folgende Darstellung als Baum



Der faire Preis der Option ist somit

$$\pi_0^A(H) = Z_0 = 81 + 17 \cdot \mathcal{K}.$$

c) Die optimale Stoppzeit ist gegeben durch

$$\tau^* = \inf\{t \in \{0, 1, 2\} : Z_t = H_t/B_t\}.$$

Aus Teilaufgabe b) folgt

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in \{(u, u), (u, d)\} \\ 1, & \omega \in \{(d, u), (d, d)\}. \end{cases}$$

Aufgabe 5

Lösungsvorschlag: (3+4 Punkte)

a) Sei \mathbb{P} die Gleichverteilung auf den Zahlen 0, 50, 100. Wenn mit X der zufällige Gewinn von Peter bezeichnet wird, ist der erwartete Nutzen gegeben durch

$$\mathbb{E}[U(X)] = \frac{1}{2 \cdot 3} [\log(1) + \log(51) + \log(101)] = 1.4245.$$

Peter wäre maximal bereit einen Betrag in Höhe von seinem Sicherheitsäquivalent $c(\mathbb{P})$ zu zahlen. Peters Sicherheitsäquivalent erfüllt

$$U(c(\mathbb{P})) = \mathbb{E}[U(X)].$$

Da $U^{-1}(y) = e^{2y} - 1$ folgt $c(\mathbb{P}) = U^{-1}(\mathbb{E}[U(X)]) = e^{2 \cdot 1.4245} - 1 = 16.2705$ (bzw. bei exakter Rechnung 16.2702). Er wäre also bereit bis zu 16.2705 EUR für das Spiel zu zahlen.

b) Weiterhin sei \mathbb{P} die Gleichverteilung auf den Zahlen 0, 50, 100. Wir werden überprüfen, ob

$$\mathbb{P} \succeq_{SSD} \mathbb{Q} \quad \text{oder} \quad \mathbb{P} \preceq_{SSD} \mathbb{Q}$$

gilt. Sei F die Verteilungsfunktion von \mathbb{P} und G die Verteilungsfunktion von \mathbb{Q} . Dann gilt

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 50, \\ \frac{2}{3}, & 50 \leq x < 100, \\ 1, & 100 \leq x, \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq x < 50, \\ \frac{5}{6}, & 50 \leq x < 100, \\ 1, & 100 \leq x. \end{cases}$$

Bemerkung: Es gilt $F(0) < G(0)$ und $F(50) > G(50)$. Somit gibt es nach Aufgabe 1 des 12. Übungsblattes keine Präferenz bezüglich der stochastischen Dominanz erster Ordnung.

Aufgabe 6

Lösungsvorschlag: (5 Punkte) Zunächst ist

$$U'(x) = x^{-3} > 0 \quad \text{und} \quad U''(x) = -3x^{-4} < 0, \quad x > 0.$$

Damit ist U in der Tat eine stetige, streng monoton wachsende und streng konkave Nutzenfunktion mit

$$U'^{-1}(y) = y^{-1/3}$$

sowie $\lim_{y \downarrow 0} U'^{-1}(y) = +\infty$ und $\lim_{y \uparrow \infty} U'^{-1}(y) = 0$. Mit der Martingalmethode gilt

$$X^* = U'^{-1}\left(\frac{c^*L}{B_T}\right) = (c^*)^{-1/3} B_T^{1/3} L^{-1/3}.$$

Zudem muss die Nebenbedingung

$$v_0 = \mathbb{E}\left(\frac{X^*L}{B_T}\right) = \mathbb{E}\left((c^*)^{-1/3} B_T^{1/3} L^{-1/3} \frac{L}{B_T}\right) = (c^*)^{-1/3} B_T^{-2/3} \mathbb{E}(L^{2/3})$$

erfüllt sein. Damit ist $(c^*)^{-1/3} = v_0 \frac{B_T^{2/3}}{\mathbb{E}(L^{2/3})}$ und

$$X^* = v_0 \frac{B_T^{2/3}}{\mathbb{E}(L^{2/3})} B_T^{1/3} L^{-1/3} = v_0 B_T [\mathbb{E}(L^{2/3})]^{-1} L^{-1/3}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(U(X^*)) &= -\frac{1}{2} \mathbb{E}[v_0 B_T [\mathbb{E}(L^{2/3})]^{-1} L^{-1/3}]^{-2} \\ &= -\frac{1}{2} v_0^{-2} B_T^{-2} [\mathbb{E}(L^{2/3})]^2 \mathbb{E}(L^{2/3}) \\ &= -\frac{1}{2} v_0^{-2} B_T^{-2} [\mathbb{E}(L^{2/3})]^3. \end{aligned}$$