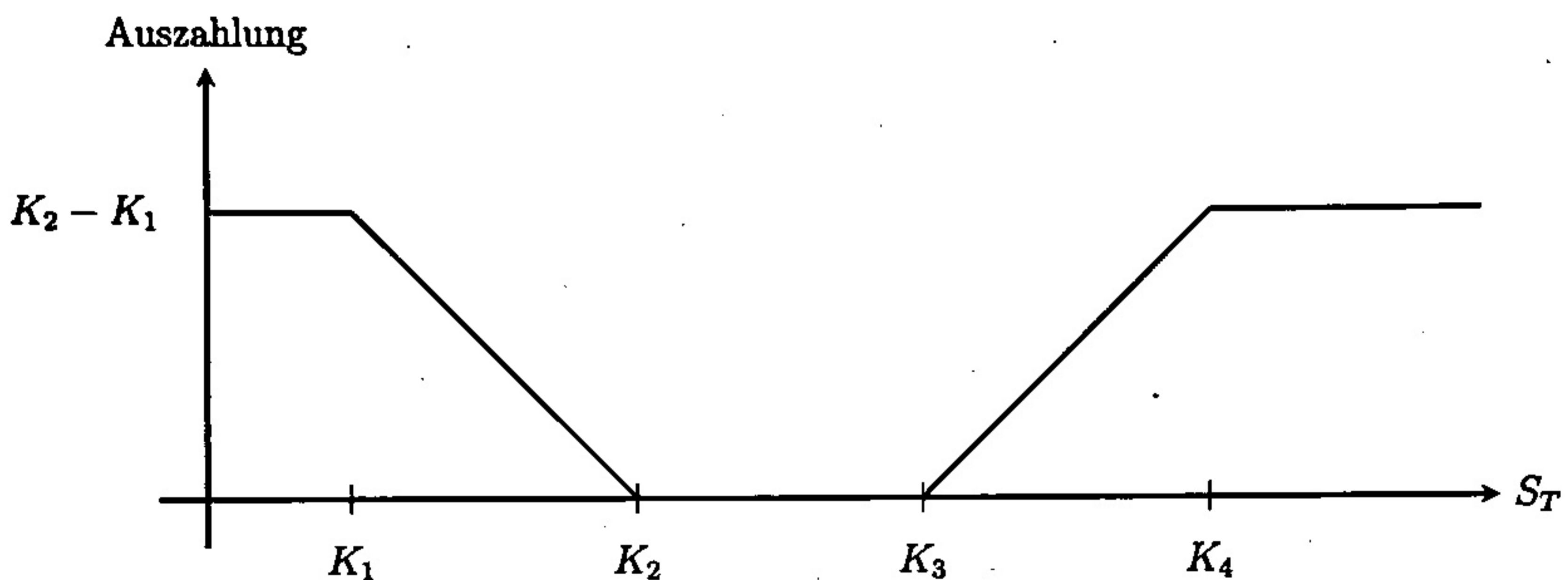


Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei ein T -periodiger endlicher Finanzmarkt mit einer Aktie mit Preisprozess $S = (S_t)_{t=0, \dots, T}$ und einem risikolosen normierten deterministischen Bond mit Preisprozess $B = (B_t)_{t=0, \dots, T}$. Zudem sei ein Zahlungsanspruch $H = H(S_T)$ mit folgendem Auszahlungsprofil gegeben, wobei $K_4 - K_3 = K_3 - K_2 = K_2 - K_1$ und $0 < K_i < \infty$ für $i = 1, \dots, 4$ ist:



Replizieren Sie den Zahlungsanspruch ausschließlich mit Europäischen Calls auf die Aktie S und dem risikolosen Wertpapier B . Beachten Sie, dass eine grafische Begründung nicht ausreichend ist.

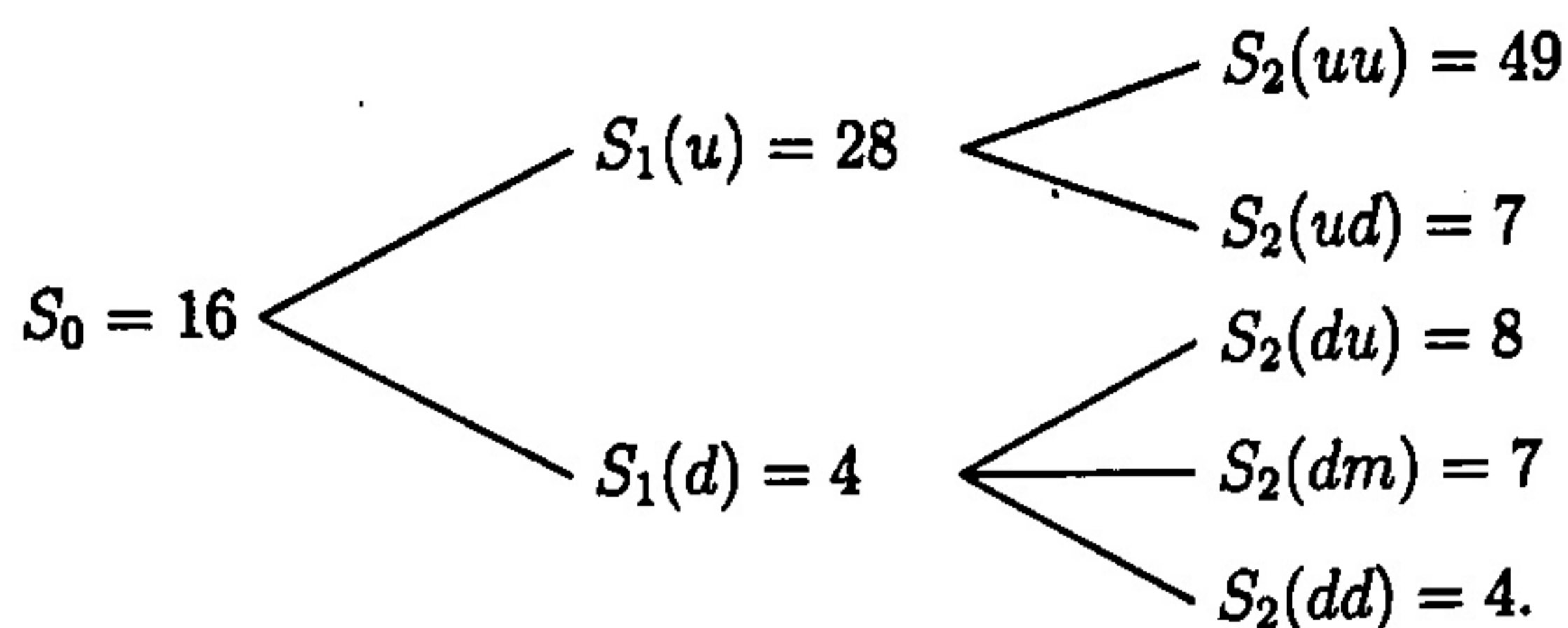
Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiges CRR-Modell mit $S_0 = 20$, $u = 2$ und $d = \frac{1}{2}$.

- Für welche Zinsraten r ist der Markt arbitragefrei?
- Es sei $r = 0.25$. Bestimmen Sie die Hedging-Strategie für eine europäische Put Option auf die Aktie mit Strikepreis $K = 20$ und Fälligkeit $T = 2$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit einem normierten risikolosen Wertpapier $B = (B_t)_{t=0,1,2}$ mit $B_0 = 1$, wobei der Zinssatz $r = 0.25$ sei, und einer Aktie mit folgender Kursentwicklung:



Zudem sei ein Zahlungsanspruch $H := \frac{25}{16} \cdot (5 - S_2)_+$ gegeben.

- a) Bestimmen Sie die Menge \mathcal{Q}^* der äquivalenten Martingalmaße und tragen Sie die Menge in die folgende Tabelle ein:

ω	uu	ud	du	dm	dd	
$\mathcal{Q}(\{\omega\})$						

- b) Untersuchen Sie den Markt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.
 c) Bestimmen Sie alle arbitragefreien Preise für H .

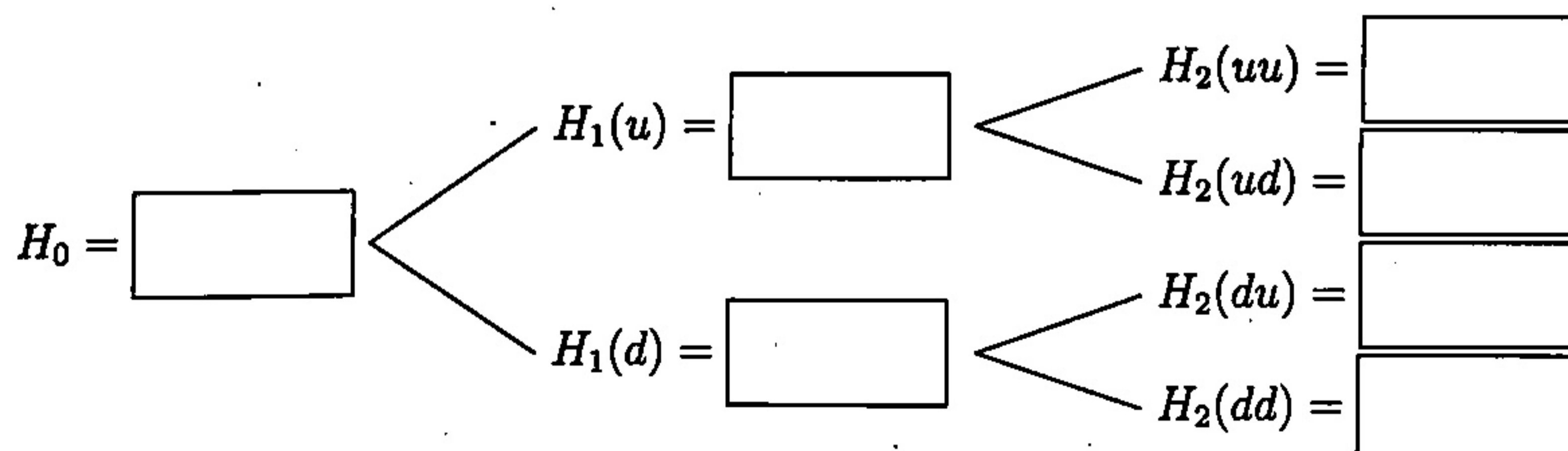
Aufgabe 4 (9 Punkte)

Es sei ein 2-periodiger Cox-Ross-Rubinstein-Finanzmarkt mit $r = \frac{1}{4}$, $S_0 = 20$ sowie $u = 2$ und $d = \frac{1}{2}$ gegeben. Der Preisprozess der Aktie sei $S = (S_t)_{t=0,1,2}$. Zudem sei eine amerikanische Option H gegeben, welche zum Zeitpunkt t die Auszahlung

$$H_t = S_t(1 + c)1_{\{S_i \leq 15 \text{ für ein } i \leq t\}}$$

besitzt, wobei $c > 0$ gilt.

- a) Tragen Sie die Auszahlung der Option in den folgenden Baum ein



- b) Bestimmen Sie den Preis der amerikanischen Option H zum Zeitpunkt $t = 0$.
 c) Geben Sie die optimale Ausübungsstrategie für die amerikanische Option H an.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Gegeben sei ein endlicher, arbitragefreier, T -periodiger Finanzmarkt mit einem normierten Bond $B = (B_t)_{t=0, \dots, T}$ mit konstanter Zinsrate $r \geq 0$, einer Aktie mit Preisprozess $S = (S_t)_{t=0, \dots, T}$ und den diskontierten Renditen

$$R_t = \frac{1}{1+r} \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1, \quad t = 1, \dots, T,$$

die unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathbb{P}\left(R_t = -\frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}(R_t = 2) = \frac{1}{2}$$

sind. Die Nutzenfunktion

$$U : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{sei} \quad U(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma$$

für ein $\gamma \in (0, 1)$ und $C := \max_{a \in [-\frac{1}{2}, 2]} \mathbb{E}[(1 + aR_1)^\gamma]$.

a) Es sei $x \geq 0$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{P}(x + bR_1 \geq 0) = 1 \quad \iff \quad b \in \left[-\frac{x}{2}, 2x\right].$$

b) Betrachten Sie das Portfolio-Optimierungsproblem

$$(P) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi \in \Phi} \mathbb{E}[U(V_T^\varphi)] \\ V_0^\varphi = v_0 \in [0, \infty). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass

$$J_t(x) = \frac{1}{\gamma} x^\gamma (1+r)^{(T-t)\gamma} C^{(T-t)}, \quad x \geq 0, \quad t = T, \dots, 0,$$

die Wertfunktionen sind.

c) Geben Sie die optimale Investitionspolitik an.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Gegeben sei ein Portfolio aus zwei Wertpapieren, dessen Renditen (R^1, R^2) nur die Werte $(-1, -4)$, $(-1, 2)$, $(3, -4)$ und $(3, 2)$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit annehmen können.

- Bestimmen Sie das Minimum-Varianz Portfolio und geben Sie dessen erwartete Rendite und Varianz an.
- Skizzieren Sie die Effizienzkurve des Markowitz Modells in einem Risiko-Rendite Diagramm.
- Zudem sei eine risikolose Anlage mit Rendite $R_0 = 0.1$ gegeben. Skizzieren Sie die Effizienzkurve des Tobin Modells in das Risiko-Rendite Diagramm aus b).

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Lösungsvorschlag: (4 Punkte) Die Option hat folgende Auszahlung

$$H(S_T) = \begin{cases} K_2 - K_1, & S_T < K_1 \\ K_2 - S_T, & K_1 \leq S_T < K_2 \\ 0, & K_2 \leq S_T < K_3 \\ S_T - K_3, & K_3 \leq S_T < K_4 \\ K_2 - K_1, & K_4 \leq S_T. \end{cases}$$

Der Zahlungsanspruch lässt sich durch ein Portfolio mit einer risikolosen Anlage in Höhe von $(K_2 - K_1)/B_T$, dem Kauf von zwei Calls mit Strike K_2 und K_3 sowie dem Verkauf von zwei Calls mit Strike K_1 und K_4 replizieren. Das replizierende Portfolio hat somit zum Zeitpunkt T die Auszahlung

$$K_2 - K_1 - (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_2)_+ + (S_T - K_3)_+ - (S_T - K_4)_+.$$

Im Folgenden wird die Gleichheit der Auszahlungen in Abhängigkeit von S_T überprüft. Falls $S_T < K_1$ gilt, so kommt durch keinen Call eine Auszahlung zustande und es wird nur der verzinste Betrag $K_2 - K_1$ ausgezahlt.

Falls $K_1 \leq S_T < K_2$ gilt, so liefert der Call mit Strike K_1 und die risikolose Anlage eine Auszahlung und es wird $K_2 - K_1 - (S_T - K_1) = K_2 - S_T$ ausgezahlt.

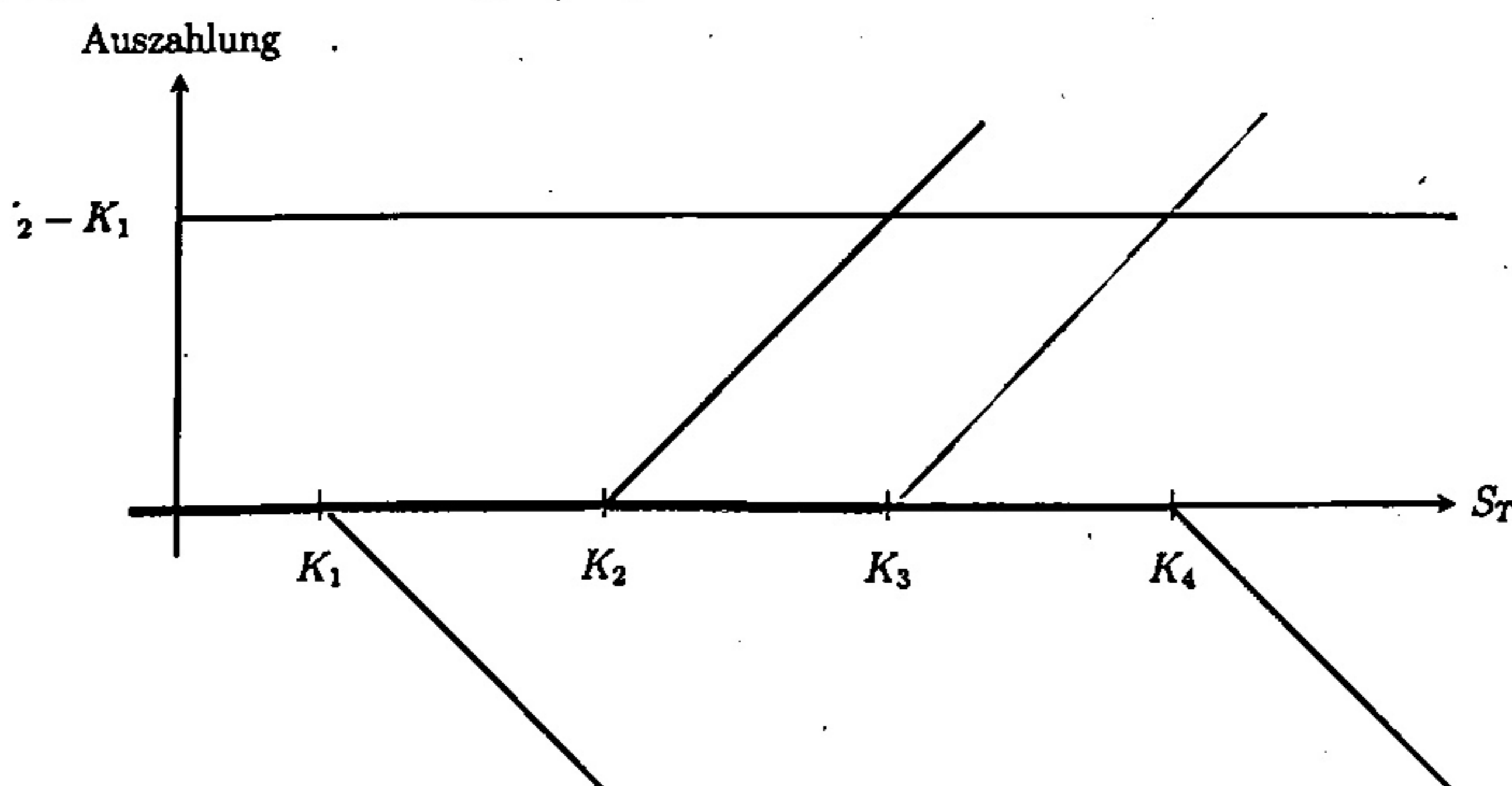
Falls $K_2 \leq S_T < K_3$ gilt, so liefern die Calls mit Strike K_1, K_2 und die risikolose Anlage eine Auszahlung und es wird $K_2 - K_1 - (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_2)_+ = 0$ ausgezahlt.

Falls $K_3 \leq S_T < K_4$ gilt, so liefern die Calls mit Strike K_1, K_2, K_3 und die risikolose Anlage eine Auszahlung und es wird $K_2 - K_1 - (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_2)_+ + (S_T - K_3)_+ = S_T - K_3$ ausgezahlt.

Falls $K_4 \leq S_T$ gilt, so liefern die alle Calls und die risikolose Anlage eine Auszahlung und es wird $K_2 - K_1 - (S_T - K_1)_+ + (S_T - K_2)_+ + (S_T - K_3)_+ - (S_T - K_4)_+ = K_4 - K_3 = K_2 - K_1$ ausgezahlt.

In jedem Fall stimmt die Auszahlung des replizierenden Portfolios mit der Auszahlung des Zahlungsanspruchs überein.

In der Abbildung sind dargestellt: Auszahlung von $-H_C^E(K_1)$ (orange), Auszahlung von $H_C^E(K_2)$ (blau), Auszahlung von $H_C^E(K_3)$ (grün), Auszahlung von $-H_C^E(K_4)$ (lila), Auszahlung von der risikolosen Anlage (rot).



Aufgabe 2 (4 Punkte)

Lösungsvorschlag: (1+3 Punkte)

- a) Es muss $d < 1 + r < u$ gelten, und damit $\frac{1}{2} < 1 + r < 2$ bzw. $r \in (-\frac{1}{2}, 1)$.
- b) Es ist dann $S_2(u, u) = 80$, $S_2(u, d) = S_2(d, u) = 20$ und $S_2(d, d) = 5$. Mit $H = (K - S_2)^+$ gilt $H(u, u) = H(u, d) = H(d, u) = 0$ und $H(d, d) = 15$. Damit sind $\alpha_1(u) = \beta_1(u) = 0$ und

$$\alpha_1(d) = \frac{H(d, u) - H(d, d)}{(u - d)S_1(d)} = \frac{0 - 15}{(2 - \frac{1}{2})10} = -1,$$

$$\beta_1(d) = \frac{uH(d, d) - dH(d, u)}{(u - d)B_2} = \frac{2 \cdot 15 - 0}{(2 - \frac{1}{2})\frac{25}{16}} = \frac{64}{5}.$$

Dann ist

$$V_1(u) = \alpha_1(u)S_1(u) + \beta_1(u)B_1 = 0,$$

$$V_1(d) = \alpha_1(d)S_1(d) + \beta_1(d)B_1 = -1 \cdot 10 + \frac{64}{5} \cdot \frac{5}{4} = 6.$$

Schließlich ergibt sich

$$\alpha_0 = \frac{V_1(u) - V_1(d)}{(u - d)S_0} = \frac{0 - 6}{(2 - \frac{1}{2})20} = -\frac{1}{5},$$

$$\beta_0 = \frac{uV_1(d) - dV_1(u)}{(u - d)B_1} = \frac{2 \cdot 6 - 0}{(2 - \frac{1}{2})\frac{5}{4}} = \frac{32}{5}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Lösungsvorschlag: (5+1+2 Punkte)

- a) Zunächst gilt $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{5}{4}$ und $B_2 = \frac{25}{16}$. Zudem ist

$$q_1(u) = \frac{1 + r - S_1(d)/S_0}{S_1(u)/S_0 - S_1(d)/S_0} = \frac{1.25 - \frac{1}{4}}{\frac{7}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

und

$$q_2(u|u) = \frac{1 + r - S_2(ud)/S_1(u)}{S_2(uu)/S_1(u) - S_2(ud)/S_1(u)} = \frac{1.25 - \frac{1}{4}}{\frac{7}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Zudem muss $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\frac{S_2}{B_2} | \mathcal{F}_1)(d) = \frac{S_1(d)}{B_1}$ bzw. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2 | \mathcal{F}_1)(d) = S_1(d)B_1 = 5$ sein. Damit erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 8 \cdot q_2(u|d) + 7 \cdot q_2(m|d) + 4q_2(d|d) &= 5, \\ q_2(u|d) + q_2(m|d) + q_2(d|d) &= 1. \end{aligned}$$

Mit $q := q_2(u|d)$ und $q_2(d|d) = 1 - q - q_2(m|d)$ eingesetzt in die erste Gleichung ergibt sich

$$5 = 8q + 7 \cdot q_2(m|d) + 4(1 - q - q_2(m|d)) = 4q + 3q_2(m|d) + 4,$$

und damit

$$q_2(m|d) = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}q,$$

$$q_2(d|d) = 1 - q - q_2(m|d) = 1 - q - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}q = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}q.$$

Da zudem $q, q_2(m|d), q_2(d|d) \in (0, 1)$ sein müssen, ergibt sich

$$\mathcal{Q}_2^*(d) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} : q \in (0, \frac{1}{4}) \right\}.$$

ω	uu	ud	du	dm	dd	
$\mathbb{Q}(\{\omega\})$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}q$	$\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}q)$	$\frac{1}{3}(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}q)$	$q \in (0, \frac{1}{4})$

b) Da $|\mathcal{Q}^*| > 1$ folgt aus dem ersten Hauptsatz, dass es sich um einen arbitragefreien und nicht vollständigen Finanzmarkt handelt.

c) Es gilt $H(uu) = H(ud) = H(du) = H(dm) = 0$ und $H(dd) = \frac{25}{16} \cdot (5 - 4) = \frac{25}{16}$.
Damit ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{H}{B_2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}q \right) \cdot \frac{25}{16} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9}q.$$

Damit gilt

$$\pi_-(H) = \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{H}{B_2} \right) = \frac{2}{9}$$

für $q = 0$ und

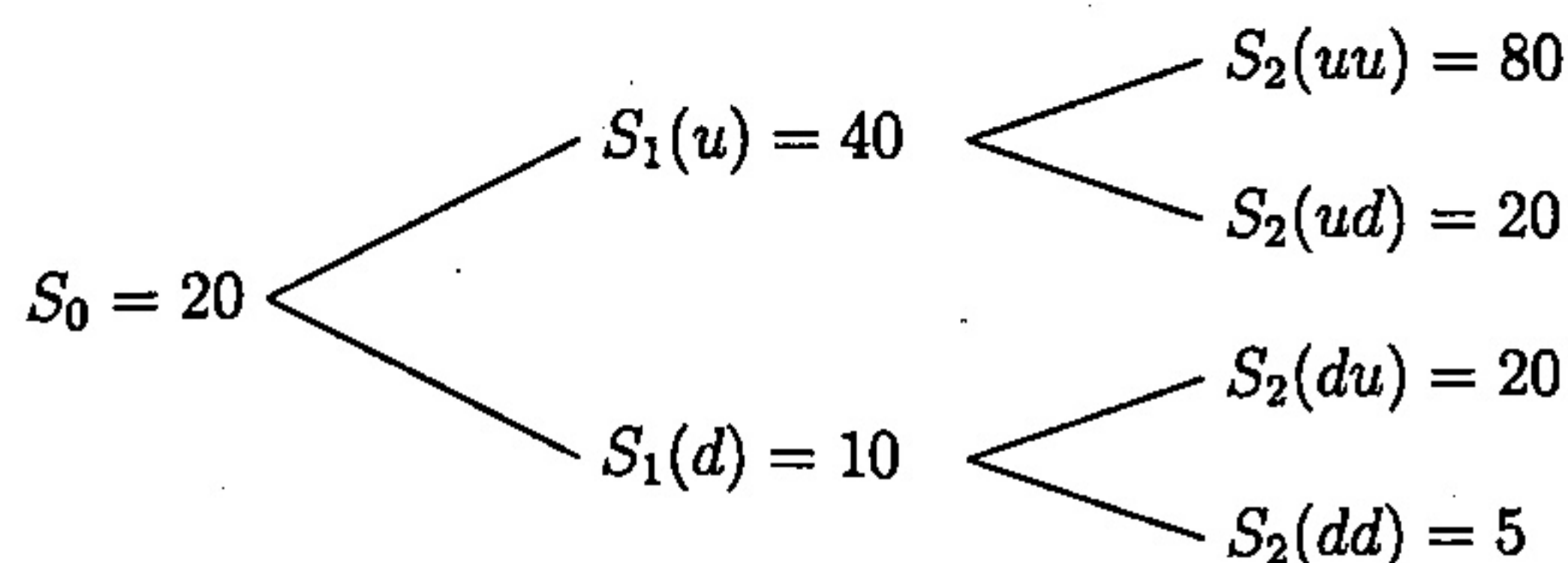
$$\pi_+(H) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\frac{H}{B_2} \right) = \frac{2}{9} + \frac{11}{94} = \frac{1}{4}$$

für $q = \frac{1}{4}$. Es folgt, dass die arbitragefreien Preise von $\pi(H)$ in dem Intervall $(\frac{2}{9}, \frac{1}{4})$ liegen müssen.

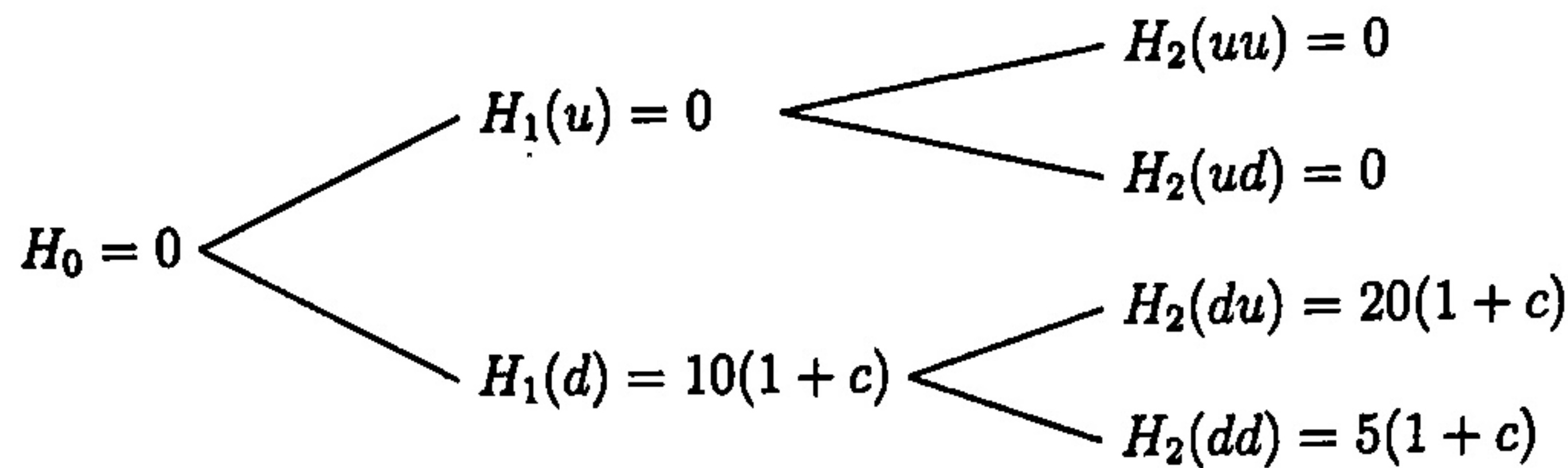
Aufgabe 4 (9 Punkte)

Lösungsvorschlag: (2+5.5+1.5 Punkte)

a) Die Preisverlauf der Aktie ist



Somit hat die Option H die Auszahlung



- b) Der Preis der Option wird mithilfe der Snell-Einhüllenden $(Z_t)_{t=0,1,2}$ bezüglich dem Prozess $(\frac{H_t}{B_t})_{t=0,1,2}$ bestimmt. Dafür wird das äquivalente Martingalmaß benötigt. Da hier ein CRR-Finanzmarkt vorliegt, ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeit q und $1 - q$ für beide Perioden durch

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

und

$$1 - q = \frac{1}{2}.$$

Für das risikolose Wertpapier gilt $B_0 = 1, B_1 = 1 + r = \frac{5}{4}, B_2 = \frac{25}{16}$.

Für $t = 2$ gilt $Z_2 = \frac{H_2}{B_2}$ und somit

$$Z_2(uu) = 0, Z_2(ud) = 0, Z_2(du) = \frac{16}{25}20(1+c), Z_2(dd) = \frac{16}{25}5(1+c).$$

Für $t = 1$ gilt

$$Z_1 = \max\left\{\frac{H_1}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1]\right\}.$$

Also

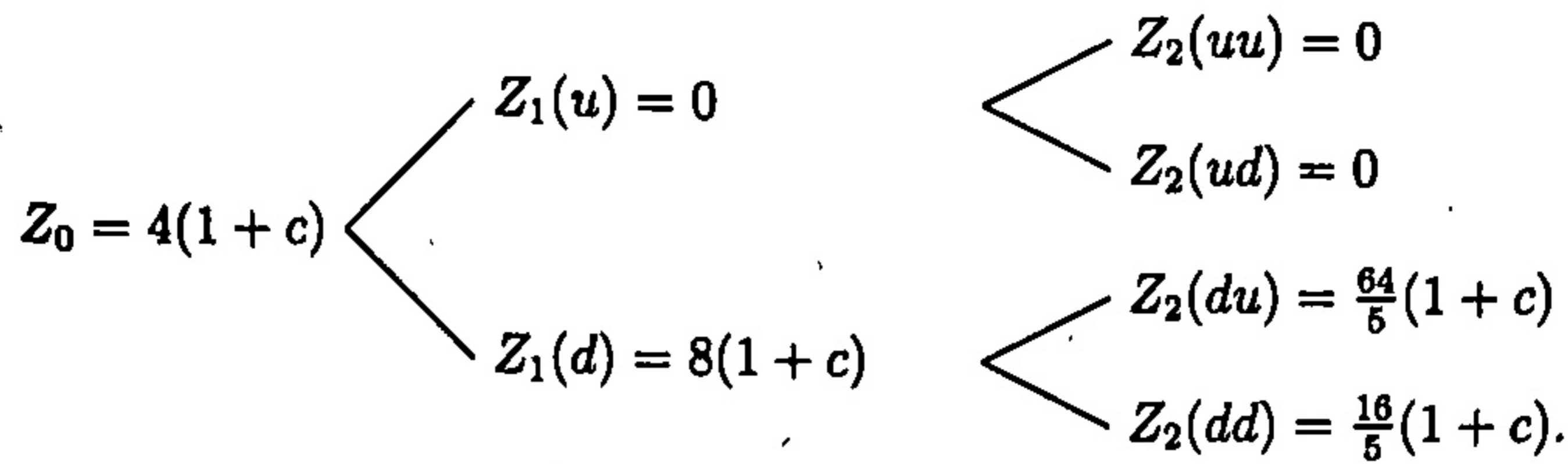
$$\begin{aligned}
 Z_1(u) &= \max\left\{\frac{H_1(u)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](u)\right\} \\
 &= \max\{0, 0\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_1(d) &= \max\left\{\frac{H_1(d)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](d)\right\} \\
 &= \max\left\{\frac{4}{5}10(1+c), \frac{1}{2}\frac{16}{25}20(1+c) + \frac{1}{2}\frac{16}{25}5(1+c)\right\} \\
 &= (1+c)\max\left\{8, \frac{40}{5}\right\} \\
 &= 8(1+c).
 \end{aligned}$$

Für $t = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 Z_0 &= \max\left\{\frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_1|\mathcal{F}_0]\right\} \\
 &= \max\left\{0, \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}8(1+c)\right\} \\
 &= 4(1+c).
 \end{aligned}$$

Der Prozess $(Z_t)_{t=0,1,2}$ hat folgende Darstellung als Baum



Der faire Preis der Option ist somit

$$\pi_0^A(H) = Z_0 = 4(1+c).$$

c) Die optimale Ausübungsstrategie ist gegeben durch $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : Z_t = \frac{H_t}{B_t}\}$. Also

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{(u, u), (u, d)\} \\ 1, & \omega \in \{(d, u), (d, d)\}. \end{cases}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Lösungsvorschlag: (1+4+3 Punkte)

a) Für $x \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
 1 &= \mathbb{P}(x + bR \geq 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(x - b\frac{1}{2} \geq 0\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(x + b2 \geq 0) \\
 &= \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{b \leq 2x\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{b \geq -\frac{1}{2}x\}} \\
 \iff b &\in \left[-\frac{x}{2}, 2x\right].
 \end{aligned}$$

b) Wir zeigen die Aussage mit vollständiger Induktion:

I.A.: $t = T$: $J_T(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma = U(x)$, $x \geq 0$, was die zugrundeliegende Nutzenfunktion ist.

I.V.: $J_{t+1}(x) = \frac{1}{\gamma}x^\gamma(1+r)^{(T-t-1)\gamma}C^{(T-t-1)}$, $x \geq 0$.

I.S.: Wir zeigen die Aussage für t .

Mit der Bellmann-Gleichung gilt

$$J_t(x) = \sup_f \mathbb{E}(J_{t+1}((1+r)[x + f_t(x)R_{t+1}])),$$

wobei $\mathbb{P}(x + f_t(x)R_{t+1} > 0) = 1$ gelten muss, was mit (a) äquivalent ist zu $f_t(x) \in [-\frac{x}{2}, 2x]$. Mit der Induktionsvoraussetzung und der identischen Verteilung der diskontierten Renditen gilt dann

$$\begin{aligned}
 J_t(x) &= \frac{1}{\gamma}(1+r)^{(T-t-1)\gamma}C^{(T-t-1)} \sup_{f_t(x) \in [-\frac{x}{2}, 2x]} \mathbb{E}([(1+r)(x + f_t(x)R_1)]^\gamma) \\
 &= \frac{1}{\gamma}(1+r)^{(T-t)\gamma}C^{(T-t-1)} \sup_{a \in [-\frac{1}{2}, 2]} \mathbb{E}([x + axR_1]^\gamma) \\
 &= \frac{1}{\gamma}(1+r)^{(T-t)\gamma}C^{(T-t-1)}x^\gamma C \\
 &= \frac{1}{\gamma}x^\gamma(1+r)^{(T-t)\gamma}C^{(T-t)}, \quad x \geq 0.
 \end{aligned}$$

c) Die optimale Investitionspolitik $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$ muss

$$\sup_{f_t} \mathbb{E}(J_{t+1}((1+r)[x + f_t(x)R_{t+1}])) = \mathbb{E}(J_{t+1}((1+r)[x + f_t^*(x)R_{t+1}]))$$

erfüllen, was mit der Darstellung aus (a) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\gamma} (1+r)^{(T-t-1)\gamma} C^{(T-t-1)} \sup_{f_t} \mathbb{E}(((1+r)[x + f_t(x)R_1])^\gamma) \\ &= \frac{1}{\gamma} (1+r)^{(T-t-1)\gamma} C^{(T-t-1)} \mathbb{E}(((1+r)[x + f_t^*(x)R_1])^\gamma) \end{aligned}$$

ist. Daher muss

$$\begin{aligned} \mathbb{E}([x + f_t^*(x)R_1]^\gamma) &= \sup_{b \in [-\frac{x}{2}, 2x]} \mathbb{E}([x + bR_1]^\gamma) = \sup_{a \in [-\frac{1}{2}, 2]} \mathbb{E}([x + axR_1]^\gamma) \\ &= x^\gamma \sup_{a \in [-\frac{1}{2}, 2]} \mathbb{E}([1 + aR_1]^\gamma) = x^\gamma \mathbb{E}([1 + a^*R_1]^\gamma) = \mathbb{E}([x + a^*xR_1]^\gamma) \end{aligned}$$

gelten, wobei $a^* = \operatorname{argmax}_{a \in [-\frac{1}{2}, 2]} \mathbb{E}([1 + aR_1]^\gamma)$ ist. Daraus folgt $f_t^*(x) = a^*x$ für $t = 0, \dots, T$.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Lösungsvorschlag: (4+1.5+1.5 Punkte)

a) Zunächst bestimmen wir den Erwartungswert und die Kovarianzmatrix der Renditen:

$$m_1 := \mathbb{E}(R_1) = \frac{1}{2}[-1 + 3] = 1,$$

$$m_2 := \mathbb{E}(R_2) = \frac{1}{2}[2 - 4] = -1,$$

$$\operatorname{Var}(R_1) = \frac{1}{2}[(3-1)^2 + (-1-1)^2] = \frac{1}{2}[4+4] = 4,$$

$$\operatorname{Var}(R_2) = \frac{1}{2}[(-4+1)^2 + (2+1)^2] = \frac{1}{2}[9+9] = 9,$$

$$\operatorname{Cov}(R_1, R_2) = \mathbb{E}(R_1 R_2) - \mathbb{E}(R_1)\mathbb{E}(R_2) = \frac{1}{4}[4 - 2 - 12 + 6] + 1 = 0.$$

Damit ergibt sich

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Mit

$$c = e^T \Sigma^{-1} e = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36} \quad \text{ist} \quad \pi_M^* = \frac{1}{c} \Sigma^{-1} e = \frac{36}{13} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{13} \\ \frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

das Minimum-Varianz Portfolio mit erwarteter Rendite und Varianz

$$m_M(\pi_M^*) = m^T \pi_M^* = \frac{36}{13} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right] = \frac{36}{13} \frac{5}{36} = \frac{5}{13} \quad \text{und} \quad \sigma_M^2(\pi_M^*) = (\pi_M^*)^T \Sigma \pi_M^* = \frac{36}{13}.$$

b) +c)