Umbruch von Max Grützner
Version 1 05.06.2024 WS 23/24 06.03.2024

Bäuerle

Klausur zur Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.
Bemerkungen: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

Aufgabe 1 (3+1=4 Punkte)

Gegeben sei ein arbitragefreier, diskreter Finanzmarkt mit Zeithorizont $T > 0$. Auf diesem Finanzmarkt gebe es eine Aktie mit Preisprozess $(S_t)_{t=0,\dots,T}$ und ein normiertes, verzinstes risikoloses Wertpapier mit Preisprozess $(B_t)_{t=0,\dots,T}$.

a) Zeigen Sie mithilfe eines Arbitragetableaus, dass der Preis zur Zeit $t = 0$ eines europäischen Puts monoton wachsend im Basispreis ist. D.h. für zwei europäische Puts auf denselben Basiswert mit Basispreisen K_1, K_2 gilt bei gleicher Fälligkeit T

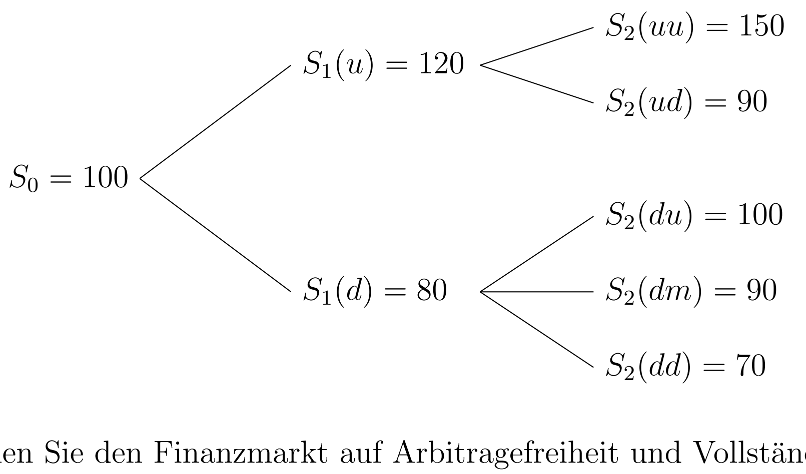
$$K_1 \leq K_2 \quad \Longrightarrow \quad \pi\left((K_1 - S_T)^+\right) \leq \pi\left((K_2 - S_T)^+\right).$$

Nun gelte für den Startpreis der Aktie $S_0 = 110$ und das risikolose Wertpapier besitze einen konstanten Zinssatz von $r = 0.1$.

b) Wenn ein europäischer Put mit Basispreis $K = 100$ und Fälligkeit T zur Zeit $t = 0$ einen Preis von 1 hat, welchen Preis hat dann (in Abhängigkeit von T) ein europäischer Call zur Zeit $t = 0$ mit gleichem Basispreis und gleicher Fälligkeit, wenn keine Arbitrage vorhanden ist.

Aufgabe 2 (4+2+1=7 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit normiertem risikolosem Wertpapier, d.h. $B_0 = 1$, mit Zinssatz $r = 1/8$. Zusätzlich existiere eine Aktie S mit folgendem Aktienpreisverlauf:



a) Untersuchen Sie den Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit.

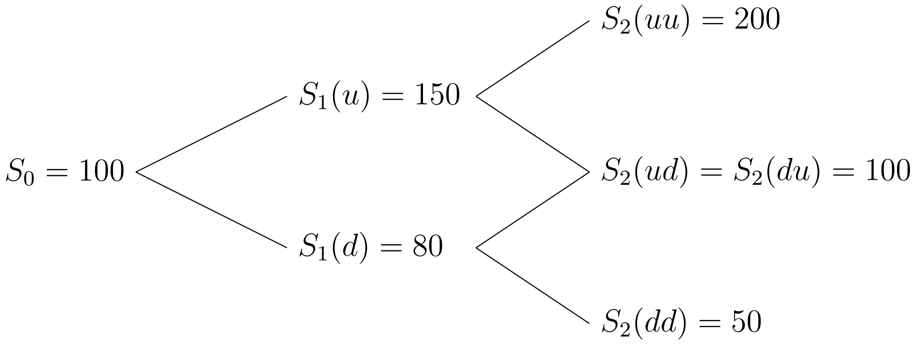
b) Bestimmen Sie alle fairen Preise der europäischen Volatilitätswette

$$H := |S_1 - S_2|.$$

c) Geben Sie einen in diesem Finanzmarkt erreichbaren, nichtdeterministischen Zahlungsanspruch an.

Aufgabe 3 (2+1+2+3+1=9 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt, bestehend aus einer Aktie mit Startpreis $S_0 = 100$ und einem risikolosen Wertpapier mit Startpreis $B_0 = 1$. Der Preisprozess der Aktie ist gegeben durch



a) Für das risikolose Wertpapier gelte $B_1 = 1.25$. Geben Sie alle Preise B_2 an, für die der Finanzmarkt arbitragefrei ist.

Nun gelte $B_2 = 1.25$. Weiter sei eine sogenannte „Bering-Option“ gegeben, also eine asiatische Calloption mit amerikanischer Ausübungsart. Die Auszahlung der Option zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$ ist also

$$H_t = \left(S_t - \frac{1}{t+1}\sum_{j=0}^{t} S_j\right)^+$$

b) Skizzieren Sie den Auszahlungsprozess der Option.

c) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^*$ an.

d) Bestimmen Sie den fairen Preis der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0$.

e) Geben Sie eine optimale Ausübungsstrategie der Option an.

Aufgabe 4 (1+2+2+2=7 Punkte)

Gegeben sei eine Gleichverteilung μ auf den Punkten $\{-10, -5,\ 0,\ 5,\ 10\}$, d.h. $\mu(\{i\}) = \frac{1}{5}$ für $i \in \{-10, -5,\ 0,\ 5,\ 10\}$.

a) Definieren Sie die Ordnungen $\succeq_{FSD}$ und $\succeq_{SSD}$.

b) Geben Sie eine Verteilung $\nu \neq \mu$ auf den Punkten $\{-10, -5,\ 0,\ 5,\ 10\}$ an, so dass $\mu \succeq_{FSD} \nu$. Begründen Sie Ihre Wahl.

c) Geben Sie eine Verteilung $\nu \neq \mu$ auf den Punkten $\{-10, -5,\ 0,\ 5,\ 10\}$ an, so dass $\mu \succeq_{SSD} \nu$. Begründen Sie Ihre Wahl.

d) Gibt es eine stetige Verteilung ν, die auf ganz $\mathbb{R}$ eine positive Dichte hat mit $\nu \succeq_{FSD} \mu$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 (1+1+2+2=6 Punkte)

Wir betrachten das Markowitz Modell mit d risikobehafteten Wertpapieren. Dabei seien wie üblich die erwarteten Renditen $m = (m_1, ..., m_d) \in \mathbb{R}^d$ und $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^d$ linear unabhängig, sowie die Kovarianzmatrix Σ der Renditen positiv definit.

Es sei π^*_{MVP} das Minimum-Varianz-Portfolio. Das Portfolio $\pi \neq \pi^*_{MVP}$ sei ein weiteres beliebiges effizientes Portfolio. Außerdem bezeichnen wir wie in der Vorlesung mit $R^\pi = \pi^\top R$ die zufällige Portfolio-Rendite (ebenso für π^*_{MVP}). Zeigen Sie:

a) Für $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ist $\pi^\alpha := \alpha\pi + (1-\alpha)\pi^*_{MVP}$ ebenfalls ein effizientes Portfolio.

b) Betrachten Sie die Funktion für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha) := \mathrm{Var}(R^{\pi^\alpha}).$$

Begründen Sie: Es gilt $f'(0) = 0$.

c) Zeigen Sie: $\mathrm{Cov}(R^\pi, R^{\pi^*_{MVP}}) = \mathrm{Var}(R^{\pi^*_{MVP}})$.
[Hinweis: Verwenden Sie Teil b).]

d) Es gebe jetzt 5 Anlagen $S_1, \ldots, S_5$ im Modell. Die effizienten Portfolios bei den Zielrenditen 0% und 15% seien wie folgt:

Zielrendite	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
0%	2.8%	10.5%	14.3%	−7.8%	80.2%
15%	31.2%	−1.5%	13.6%	17.4%	39.3%

Die Prozentzahlen stellen dabei den relativen Anteil der Aktie im Portfolio dar.

Bestimmen Sie ein effizientes Portfolio $\pi^*_{0.05}$ zur Zielrendite 5%. Begründen Sie ihre Wahl und tragen Sie das Portfolio unten ein.

$$\pi^*_{0.05} = (\qquad , \qquad , \qquad , \qquad , \qquad)$$

Aufgabe 6 (1+5+1=7 Punkte)

Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine strikt wachsende, strikt konkave Funktion mit $u(0) = 0$. Weiter sei u in 0 differenzierbar und $u'(0) = 1$. Für reellwertige, beschränkte Zufallsvariablen definieren wir die Abbildung $S_u : L^\infty \to \mathbb{R}$

$$S_u(X) := \sup_{\eta \in \mathbb{R}} \{\eta + \mathbb{E}u(X - \eta)\}.$$

a) Geben Sie die Definition des Conditional Value at Risk $CVaR_\lambda(X)$ zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ an.

b) Zeigen Sie, dass $S_u(X)$ die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $S_u(X + c) = S_u(X) + c$ für $c \in \mathbb{R}$,
(ii) $S_u(c) = c$ für $c \in \mathbb{R}$,
(iii) $X \leq Y$ impliziert $S_u(X) \leq S_u(Y)$.
(iv) Für $\alpha \in (0,1)$ und $X, Y \in L^\infty$ gilt: $S_u(\alpha X + (1-\alpha)Y) \geq \alpha S_u(X) + (1-\alpha) S_u(Y)$.

c) Wir wählen in der obigen Definition $u(t) = -\frac{1}{\alpha}(-t)^+$ (die Funktion erfüllt nicht die Voraussetzungen oben, das ist hier egal). Welche Interpretation hat $-S_u(X)$?

Lösungsvorschlag: Aufgabe 1 (3+1=4 Punkte)

a) Wir haben einen arbitragefreien Finanzmarkt zum Zeithorizont $T > 0$ und zwei endfällige Puts P_1 und P_2, die sich nur in den Basispreisen K_1 und K_2 unterscheiden. Es sei $K_1 \leq K_2$.
Annahme: Es gilt $\pi(P_1) > \pi(P_2)$. Um die Behauptung, je höher der Basispreis, desto höher der Preis, zu zeigen, konstruieren wir ein Portfolio, in dem wir den vermutetermaßen besseren Put kaufen und den schlechteren Put verkaufen. Die folgende Tabelle stellt die Werte der zwei Positionen unseres Portfolios zum Start $t = 0$ (der Kapitaleinsatz und damit ein fairer Preis) und zum Ende $t = T$ (Auszahlung des Portfolios) dar, abhängig vom Marktverlauf:

	$t = 0$	$t = T$		
		$S_T \leq K_1$	$K_1 \leq S_T \leq K_2$	$K_2 \leq S_T$
Verkaufe P_1	$-\pi(P_1)$	$-K_1 + S_T$	0	0
Kaufe P_2	$\pi(P_2)$	$K_2 - S_T$	$K_2 - S_T$	0
Anlage Bond	$\pi(P_1) - \pi(P_2)$	$B_T(\pi(P_1) - \pi(P_2))$	$B_T(\pi(P_1) - \pi(P_2))$	$B_T(\pi(P_1) - \pi(P_2))$
Portfoliowert	0	> 0	> 0	> 0

Damit haben wir eine Arbitragestrategie konstruiert, was einen Widerspruch zur Arbitragefreiheit des Finanzmarkts darstellt. Die Annahme $\pi(P_1) > \pi(P_2)$ kann demnach nicht gelten.

b) Mithilfe der Put-Call-Parität erhalten wir

$$\pi(C) = P + S_0 - \frac{K}{B_T} = 111 - \frac{100}{1.1^T}.$$

Lösungsvorschlag: Aufgabe 2 (4+2+1=7 Punkte)

a) Wir bestimmen die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^*$. Mit $q := q(d|d)$ als freier Variable erhalten wir

ω	$\mathbb{Q}(\{\omega\})$
uu	$\frac{39}{64}$
ud	$\frac{13}{64}$
du	$\frac{3}{8}q$
dm	$\frac{3-9q}{16}$
dd	$\frac{3}{16}q$

Insgesamt erhalten wir also $q \in (0, \frac{1}{3})$.
Damit gilt nun

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \left(\frac{39}{64}, \frac{13}{64}, \frac{3}{8}q, \frac{3-9q}{16}, \frac{3}{16}q \right) \mid q \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Nach dem 1. Hauptsatz der Optionspreistheorie ist der Finanzmarkt arbitragefrei, nach dem 2. Hauptsatz ist er jedoch nicht vollständig.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 3 (2+1+2+3+1=9 Punkte)

a) Wir betrachten den rechten oberen und den rechten unteren Teilbaum jeweils als einperiodige CRR-Modelle. Damit die Teilbäume jeweils arbitragfrei sind, ergeben sich folgende Intervalle für den risikolosen Zinssatz:

Oberer Teilbaum:

$$(NA) \quad \Leftrightarrow \quad d < 1 + r < u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{100}{150} < 1 + r < \frac{200}{150} \quad \Leftrightarrow \quad r \in (-1/3, 1/3)$$

Unterer Teilbaum:

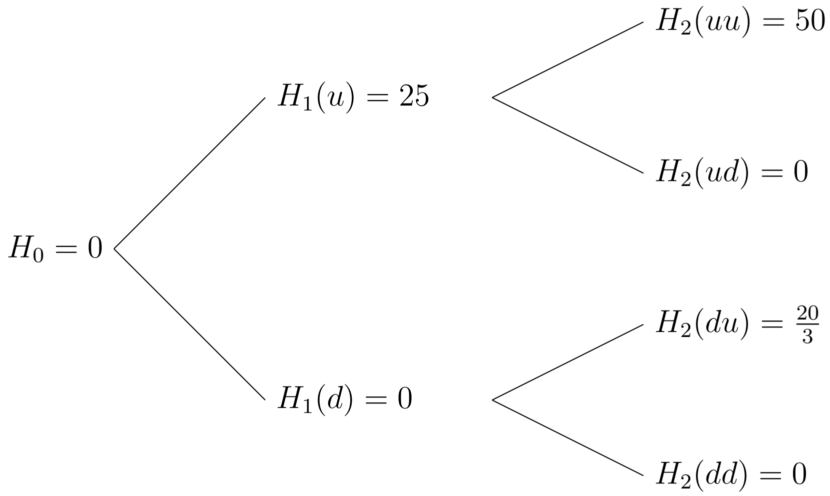
$$(NA) \quad \Leftrightarrow \quad d < 1 + r < u \quad \Leftrightarrow \quad \frac{50}{80} < 1 + r < \frac{100}{80} \quad \Leftrightarrow \quad r \in (-3/8, 1/4)$$

Da nach Vorlesung nur nichtnegative Zinssätze zugelassen sind, gilt insgesamt

$$(NA) \quad \Leftrightarrow \quad r \in [0, 1/4)\,.$$

Und damit schließlich $B_2 \in [1.25, \frac{25}{16})$.

b)



c) Es gilt

$$q(u \mid u) = \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} = q(d \mid u)$$

$$q(u \mid d) = \frac{1 - \frac{50}{80}}{\frac{100}{80} - \frac{50}{80}} = \frac{3}{5}, \qquad q(d \mid d) = \frac{2}{5}$$

$$q(u) = \frac{1.25 - \frac{80}{100}}{\frac{150}{100} - \frac{80}{100}} = \frac{9}{14}, \qquad q(d) = \frac{5}{14}.$$

Damit:

$$\mathbb{Q}(\{uu\}) = \frac{9}{14} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{28} = \mathbb{Q}(\{ud\})$$

$$\mathbb{Q}(\{du\}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{14}, \qquad \mathbb{Q}(\{dd\}) = \frac{5}{14} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{7}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{M}^* = \{\mathbb{Q}\}.$$

d) Berechne die Snell-Einhüllende von $\left(\frac{H_t}{B_t}\right)_{t=0,1,2}$:

$$Z_2(uu) = \frac{H_2(uu)}{B_2} = 40, \qquad Z_2(ud) = 0, \qquad Z_2(du) = \frac{16}{3}, \qquad Z_2(dd) = 0$$

$$Z_1(u) = \max\left\{\frac{H_1(u)}{B_1}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 \mid \mathcal{F}_1](u)\right\} = \max\left\{20, 40 \cdot \frac{1}{2}\right\} = 20$$
$$Z_1(d) = \max\left\{0, \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{5}\right\} = \frac{16}{5}$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \max\left\{\frac{H_0}{B_0}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_1 \mid \mathcal{F}_0]\right\} \\ &= \max\left\{0, \quad 20 \cdot \frac{9}{14} + \frac{16}{5} \cdot \frac{5}{14}\right\} = 14 \end{aligned}$$

Für den Preis der Option zur Zeit $t = 0$ gilt also $\pi(H) = Z_0 = 14$.

e) Die optimale Ausübungsstrategie ist gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 2, & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag: Aufgabe 4 (1+2+2+2=7 Punkte)

a) Seien $\mu, \nu \in \mathcal{P}$. Dann dominiert μ das Maß ν im Sinne der stochastischen Dominanz erster Ordnung, falls gilt:

$$\int f d\mu \geq \int f d\nu$$

für alle wachsenden Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$, für die die Erwartungswerte existieren.

Das Maß μ dominiert das Maß ν im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung, falls gilt:

$$\int U d\mu \geq \int U d\nu,$$

für alle Nutzenfunktionen U für die die Erwartungswerte existieren.

b) Die Forderung wird zum Beispiel von der Verteilung ν, definiert durch

$$\nu(\{i\}) = \delta_{-10}(\{i\}) = \begin{cases} 0, & i \in \{-5, 0, 5, 10\}, \\ 1, & i = -10, \end{cases}$$

erfüllt, da

$$F_\mu(x) \leq F_\nu(x) \; \forall \, x \iff \nu \preceq_{FSD} \mu.$$

c) Die Forderung wird zum Beispiel von der Verteilung ν, definiert durch

$$\nu(\{i\}) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & i \in \{-10, -5, 0, 5\}, \\ 0, & i = 10, \end{cases}$$

erfüllt. Dazu betrachten wird zwei Zufallsvariablen $X \sim \nu$ und $Y \sim \mu$. Laut Vorlesung gilt:

$$\mu \preceq_{SSD} \nu \iff \mathbb{E}[f(Y)] \le \mathbb{E}[f(X)] \quad \text{für alle wachsenden, konkaven Funktionen } f.$$

Für eine beliebige wachsende, konkave Funktion f gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X)] &= \frac{1}{4}(f(-10) + f(-5) + f(0) + f(5)) \\ &\le \frac{1}{5}(f(-10) + f(-5) + f(0) + f(5) + f(10)) = \mathbb{E}[f(Y)].\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Für $\nu = \delta_{-10}$ gilt $\mu \preceq_{SSD} \nu$, da $\mu \preceq_{FSD} \nu$ impliziert $\mu \preceq_{SSD} \nu$.

d) Eine solche Verteilung kann nicht existieren. Die Verteilung ν hat eine positive Dichte auf ganz $\mathbb{R}$, und damit insbesondere Wahrscheinlichkeitsmasse auf $(-\infty, -11]$. Dementsprechend gilt $F_\nu(-11) > 0 = F_\mu(-11)$, wodurch das Maß ν das Maß μ nicht bzgl. der stochastischen Dominanz erster Ordnung dominieren kann.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 5 (1+1+2+2=6 Punkte)

a) Ein effizientes Portfolio zur vorgegebenen Rendite m_p besitzt die Darstellung

$$\pi = \frac{Cm_p - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - Am_p}{D}\Sigma^{-1}e.$$

Für das Portfolio π^α gilt nun

$$\begin{aligned}\pi^\alpha = \; & \alpha\left(\frac{Cm_\pi - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - Am_\pi}{D}\Sigma^{-1}e\right) \\ & + (1-\alpha)\left(\frac{Cm_{MVP} - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - Am_{MVP}}{D}\Sigma^{-1}e\right) \\ = \; & \frac{C(\alpha m_\pi + (1-\alpha)m_{MVP}) - A}{D}\Sigma^{-1}m + \frac{B - A(\alpha m_\pi + (1-\alpha)m_{MVP})}{D}\Sigma^{-1}e.\end{aligned}$$

Das Portfolio π^α ist also optimal und ein effizientes Portfolio zur Rendite $m := \alpha m_\pi + (1-\alpha)m_{MVP}$, da when $m_\pi \ge m_{MVP}$ auch $m \ge m_{MVP}$.

b) Für $\alpha = 0$ handelt es sich bei π^α gerade um das Minimum-Varianz-Portfolio. Damit nimmt die Funktion f an der Stelle 0 ihr Minimum an, wodurch die Ableitung an der Stelle ebenfalls 0 sein muss.

c) Für das Portfolio aus a) gilt:

$$\mathrm{Var}(R^{\pi^\alpha}) = \alpha^2\mathrm{Var}(R^\pi) + 2\alpha(1-\alpha)\mathrm{Cov}(R^\pi, R^{\pi^*_{MVP}}) + (1-\alpha)^2\mathrm{Var}(R^{\pi^*_{MVP}}).$$

Die Ableitung ist gegeben durch

$$f'(\alpha) = 2\alpha\mathrm{Var}(R^\pi) + 2\mathrm{Cov}(R^\pi, R^{\pi^*_{MVP}}) - 4\alpha\mathrm{Cov}(R^\pi, R^{\pi^*_{MVP}}) - 2(1-\alpha)\mathrm{Var}(R^{\pi^*_{MVP}}).$$

Nach b) gilt, dass $f'(0) = 0$. Umstellen der Gleichung liefert dann die Behauptung.

d) Es gilt folgende Zerlegung effizienter Portfolios: $\pi^* = g + hm_p$. Damit fogt sofort: $\pi_1^* = g$. Weiter gilt: $\pi_2^* - \pi_1^* = 0.15h$. Also

$$\pi_2^* - \pi_1^* = (0.284, -0.12, -0.007, 0.252, -0.409)$$

und

$$h = (1.893, -0.8, -0.04666, 1.68, -2.726).$$

Für $m_p = 0.05$ folgt

$$\pi_{0.05}^* = g + 0.05h = (0.123, 0.065, 0.141, 0.006, 0.666).$$

Alternativ: $\pi_{0.05}^* = \frac{1}{3}\pi_1^* + \frac{2}{3}\pi_2^* = (0.123, 0.065, 0.141, 0.006, 0.666)$.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 6 (1+5+1=7 Punkte)

a) Siehe Vorlesung.

b) (i): Es gilt:

$$\begin{aligned} S_u(X+c) &= \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + \mathbb{E}u(X+c-\eta)\} \\ &= c + \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta - c + \mathbb{E}u(X-(\eta-c))\} \\ &= c + S_u(X). \end{aligned}$$

(ii): Da $u(0) = 0$ und $u'(0) = 1$ ist wegen der Konkavität $u(x) \le x$. Also gilt

$$S_u(c) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + \mathbb{E}u(c-\eta)\} \le \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + c - \eta\} = c.$$

Andererseits, da $u(0) = 0$ gilt: $S_u(c) \ge \{c + u(c-c)\} = c$.

(iii): Folgt aus der Monotonie von u und dem Erwartungswert.

(iv): Sei $\alpha \in (0,1)$. Die Funktion

$$f(x,\eta) := \eta + u(x-\eta)$$

ist konkav auf $\mathbb{R}^2$. Also gilt:

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2) \ge \alpha f(x_1,\eta_1) + (1-\alpha)f(x_2,\eta_2).$$

Da $S_u(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + \mathbb{E}u(\alpha X + (1-\alpha)Y - \eta)\}$ folgt

$$\begin{aligned} &\sup_{\eta\in\mathbb{R}}\{\eta + \mathbb{E}u(\alpha X + (1-\alpha)Y - \eta)\} \\ =&\sup_{\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}^2}\{\mathbb{E}f(\alpha X + (1-\alpha)Y, \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2)\} \\ \ge&\sup_{\eta_1,\eta_2\in\mathbb{R}^2}\{\alpha\mathbb{E}f(X,\eta_1) + (1-\alpha)\mathbb{E}f(Y,\eta_2)\} \\ =&\alpha S_u(X) + (1-\alpha)S_u(Y). \end{aligned}$$

c) Nach Einsetzen und Umformen: Conditional Value at Risk zum Niveau α.