Umbruch von Max Grützner
Version 1 12.06.2024

WS 23/24

27.03.2024

Bäuerle
Finanzmathematik in diskreter Zeit (Nachklausur)

Dauer: 120min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.
Bemerkungen: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger CRR-Finanzmarkt mit den Parametern $u = 1.5, d = 0.9$ und $r = 0.2$. Der Startpreis der Aktie sei 100. Außerdem gebe es am Markt einen europäischen Put P mit Basispreis $K = 117$, welcher aktuell bei einem Preis von $\pi(P) = 5$ notiert. Untersuchen Sie den Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und geben Sie gegebenenfalls eine Arbitragestrategie an.

Aufgabe 2 (3+2+2=7 Punkte)

Gegeben sei folgender einperiodiger Finanzmarkt mit einem risiko- und zinslosen Bond B und zwei risikobehafteten Aktien S^1 und S^2. Die erste Aktie starte mit Wert
$S_0^1 = x > 0$, die zweite mit $S_0^2 = 16$.

$$S_0^1 = x \quad \begin{array}{l} S_1^1(u) = 24 \\ S_1^1(m) = 12 \\ S_1^1(d) = 12 \end{array} \qquad\qquad S_0^2 = 16 \quad \begin{array}{l} S_1^2(u) = 20 \\ S_1^2(m) = 16 \\ S_1^2(d) = 8 \end{array}$$

a) Für welche Werte x ist der Markt arbitragefrei? Bestimmen Sie für diese x jeweils die Menge der äquivalenten Martingalmaße.

Nehmen Sie für die folgenden Teilaufgaben an, dass gilt $x = 18$.

b) Betrachten Sie folgenden europäischen Spread auf die beiden Aktien:

$$H := S_1^1 - S_1^2$$

Bestimmen Sie den fairen Preis des Spreads.

c) Nehmen Sie nun an, dass entweder Aktie 1 oder Aktie 2 vom Markt genommen wird (sogenanntes Delisting). Untersuchen Sie, wie sich das Delisting auf die Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Finanzmarkts auswirkt. Kreuzen Sie die entsprechenden Eigenschaften des resultierenden Finanzmarkts an und **begründen** Sie Ihre Antwort.

1. Fall: Delisting von Aktie 1:
Der resultierende Finanzmarkt (Aktie 2 + Bond) ist:

☐ arbitragefrei, ☐ vollständig.

2. Fall: Delisting von Aktie 2:
Der resultierende Finanzmarkt (Aktie 1 + Bond) ist:

☐ arbitragefrei, ☐ vollständig.

Aufgabe 3 (2+1+3+1+1=8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt, bestehend aus einer Aktie mit Startpreis $S_0 = 100$ und einem risikolosen Wertpapier mit Startpreis $B_0 = 1$. Der Preisprozess von Aktie und Bond ist gegeben durch

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & S_2(uu) = 144 \\
 & S_1(u) = 120 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & S_2(ud) = S_2(du) = 96 \\
 & S_1(d) = 80 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & S_2(dd) = 64
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B_0 = 1 \arrow[r, dash] & B_1 = 1.05 \arrow[r, dash] & B_2 = 1.1025
\end{tikzcd}$$

a) Geben Sie die Menge der äquivalenten Martingalmaße $\mathcal{M}^*$ an.

Weiter sei eine amerikanische Garantieoption gegeben. Die Auszahlung der Option zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$ ist dabei

$$H_t := \max\{S_t, 100 \cdot B_t\}.$$

b) Skizzieren Sie den Auszahlungsprozess der Option.

c) Bestimmen Sie den fairen Preis der Option zur Zeit $t = 0$.

d) Geben Sie die optimale Ausübungsstrategie der Option an.

e) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

„In einem beliebigen arbitragefreien diskreten Finanzmarkt ist der Preis der amerikanischen Garantieoption zur Zeit $t = 0$ stets größer oder gleich dem Startpreis des Basiswerts.“

Aufgabe 4 (1+1+1+2=5 Punkte)

Gegeben seien die drei reellwertigen Zufallsvariablen X, Y, Z mit $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\lambda), Z \sim Exp(\lambda/2)$ wobei $\lambda > 0$. Die Zufallsvariablen sind dabei nicht unbedingt unabhängig.
[Hinweis: Ist $X \sim Exp(\lambda)$, so besitzt X die Dichte $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, solange $x \geq 0$, sonst ist sie null.]

a) Definieren Sie die Ordnung $\succeq_{SSD}$.

b) Gegen Sie eine weitere Charakterisierung von $\succeq_{SSD}$ an.

c) Zeigen Sie: $\frac{1}{2}Z \sim Exp(\lambda)$.

d) Zeigen Sie: $X + Y \succeq_{SSD} Z$.

Aufgabe 5 (5+3=8 Punkte)

a) Gegeben seien ein zweiperiodiges CRR-Modell mit Parametern $d = 0.8, u = 1.2$ und $r = 0$. Dabei sei $\mathbb{P}$ die Gleichverteilung auf $\Omega = \{uu, ud, du, dd\}$.
Ein Investor besitze ein Anfangsvermögen von x_0 und eine Nutzenfunktion $U(x) = -e^{-x}$. Lösen Sie das Portfolioproblem

$$(P): \quad \max \quad \mathbb{E}[U(V_2^\varphi)] \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} V_0^\varphi = x_0 \\ \varphi \ \text{ selbstfinanzierende Handelsstrategie.} \end{array}$$

Bestimmen Sie das optimale Endvermögen und eine optimale Investitionsstrategie.

b) Gegeben seien zwei Nutzenfunktionen U_1, U_2, die auf den reellen Zahlen definiert sind und beide zweimal stetig differenzierbar sind. Der Arrow-Pratt Risikoaversionskoeffizient ist definiert durch

$$A_i(x) = -\frac{U_i''(x)}{U_i'(x)}, \qquad i = 1, 2.$$

Zeigen Sie:

$$A_1(x) > A_2(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad U_1(U_2^{-1}(t)) \text{ ist strikt konkav auf } \mathbb{R}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis die Umkehrregel der Differentialrechnung verwenden: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv. Ist die Funktion f an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Aufgabe 6 (1.5+1.5+2+2=7 Punkte)

Überprüfen Sie die potentiellen Risikomaße Varianz und Standardabweichung darauf, ob sie die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) Translationsinvarianz,

b) positive Homogenität,

c) Monotonie,

d) Subadditivität.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 1 (5 Punkte)

Wir berechnen zunächst mithilfe der risikoneutralen Bewertungsformel den fairen Preis des Puts. Es gilt

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1.2-0.9}{1.5-0.9} = \frac{1}{2}.$$

Der Put liefert nur Fall $\omega = dd$ eine Auszahlung in Höhe von 36. Wir erhalten also

$$\pi(P) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P}{B_2}\right] = \frac{1}{B_2} \cdot (1-q)^2 \cdot 36 = \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{4} \cdot 36 = 6.25.$$

Der Call ist am Markt also zu billig. Daher kaufen wir den Call und shorten die Hedging-Strategie. Da wir nur im unteren Teilbaum eine Auszahlung erhalten, folgt sofort

$$\alpha_1(u) = \beta_1(u) = 0.$$

Im unteren Teilbaum muss gelten

$$\begin{aligned} 135\alpha_1(d) + 1.2^2\beta_1(d) &= 0 \\ 81\alpha_1(d) + 1.2^2\beta_1(d) &= 36. \end{aligned}$$

Hier gilt

$$\alpha_1(d) = -\frac{2}{3}, \qquad \beta_1(d) = \frac{125}{2}.$$

Damit ist $\pi_1(P)(d) = -\frac{2}{3} \cdot 90 + \frac{125}{2} \cdot 1.2 = 15.$

Im vorderen Teilbaum muss gelten

$$\begin{aligned} 150\alpha_0 + 1.2\beta_0 &= 0 \\ 90\alpha_0 + 1.2\beta_0 &= 15. \end{aligned}$$

Hier gilt

$$\alpha_0 = -\frac{1}{4}, \qquad \beta_0 = \frac{125}{4}.$$

Die Arbitrage-Strategie ist also folgende: Kaufe zum Zeitpunkt $t = 0$ einen Put und $\frac{1}{4}$ Aktie. Nehme außerdem einen Kredit in Höhe von $\frac{125}{4}$ auf. Steigt die Aktie, werden alle Positionen im Portfolio glatt gestellt. Fällt die Aktie, wird das Portfolio so umgeschichtet, dass $\frac{2}{3}$ einer Aktie im Portfolio liegt und ein Kredit von $\frac{125}{2}$ aufgenommen ist.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 2 (3+2+2=7 Punkte)

a) Der Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn ein äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}^*$ existiert. Hinreichend und notwendig erfüllt ein solches $q_i \in (0,1)$ für $q_i := \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$, $i = 1,2,3$, die Normiertheit $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ und die Martingaleigenschaft

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_1^d}{B_1}\right] = \frac{S_0^d}{B_0},\ d = 1,2.$$

Wegen $B_0 = B_1$ muss hier also

$$S_1^d(u)q_1 + S_1^d(m)q_2 + S_1^d(d)q_3 = S_0^d,\ d = 1,2,$$

gelten. Zusammen mit der Normiertheit löst man das lineare Gleichungssystem z.B. mit Gauß:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 24 & 12 & 12 & | & x \\ 20 & 16 & 8 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -12 & -12 & | & x-24 \\ 0 & -4 & -12 & | & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -24 & | & x-12 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{12}x-1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{24}x-\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{8}x+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Wegen der bereits erfüllten Normiertheit genügt es auf $q_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, zu prüfen:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{12}x - 1 > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x > 12, \\ q_2 &= -\frac{1}{8}x + \frac{5}{2} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x < 20, \\ q_3 &= \frac{1}{24}x - \frac{1}{2} > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x > 12. \end{aligned}$$

Damit ist der Markt arbitragefrei genau dann, wenn $x \in (12, 20)$, und die äquivalenten Martingalmaße sind charakterisiert durch

$$\mathcal{M}_x^* = \left\{ (q_1, q_2, q_3)^T \;\middle|\; q_1 = \frac{1}{12}x - 1,\ q_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{8}x,\ q_3 = \frac{1}{24}x - \frac{1}{2} \right\}.$$

b) Im Fall $x = 18$ ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß gegeben durch

$$\mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{Q}(\{m\}) = \frac{1}{4}, \qquad \mathbb{Q}(\{d\}) = \frac{1}{4}.$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel erhalten wir

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_1}\right] = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot (-4) + \frac{1}{4} \cdot 4 = 2.$$

c) **1. Fall:** Delisting von Aktie 1:
Der resultierende Finanzmarkt (Aktie 2 + Bond) ist:

■ arbitragefrei, ☐ vollständig.

In diesem Fall ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* := \left\{ (2q, 1-3q, q) \,\middle|\, q \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Dementsprechend ist der Finanzmarkt nach dem 1. Hauptsatz zwar arbitragefrei, nach dem 2. Hauptsatz aber nicht vollständig.

1. Fall: Delisting von Aktie 2:
Der resultierende Finanzmarkt (Aktie 1 + Bond) ist:

■ arbitragefrei, ☐ vollständig.

In diesem Fall ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* := \left\{ \left(\frac{1}{2}, q, \frac{1}{2} - q \right) \Big| q \in \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Dementsprechend ist der Finanzmarkt nach dem 1. Hauptsatz zwar arbitragefrei, nach dem 2. Hauptsatz aber nicht vollständig.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 3 (2+1+3+1+1=8 Punkte)

a) Es handelt sich hier um ein klassisches, zweiperiodiges CRR-Modell mit den Paramtern $u = 1.2,\ d = 0.8,\ r = 1.05$. Wir berechnen also

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{5}{8}.$$

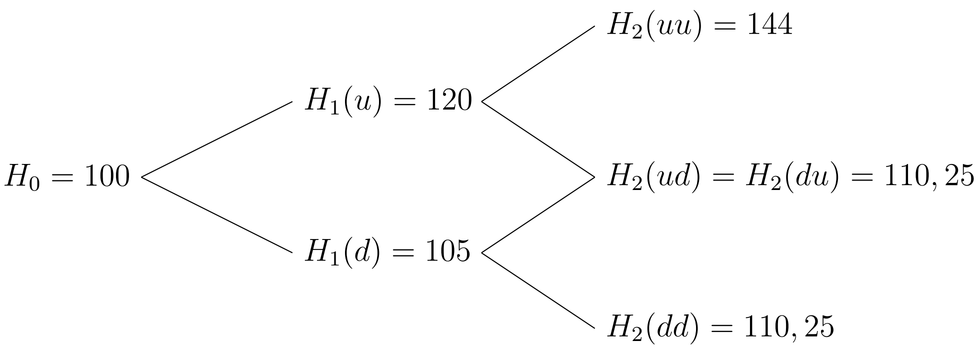
Das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist demnach gegeben durch

$$\mathbb{Q}(\{uu\}) = q^2 = \frac{25}{64}, \quad \mathbb{Q}(\{ud\}) = \mathbb{Q}(\{du\}) = q(1-q) = \frac{15}{64}, \quad \mathbb{Q}(\{dd\}) = (1-q)^2 = \frac{9}{64}.$$

Insgesamt ist also

$$\mathcal{M}^* = \{\mathbb{Q}\}.$$

b)



c) Berechne die Snell-Einhüllende von $\left(\frac{H_t}{B_t}\right)_{t=0,1,2}$:

$$Z_2(uu) = \frac{H_2(uu)}{B_2} = \frac{6400}{49}, \qquad Z_2(ud) = Z_2(du) = Z_2(dd) = 100$$

$$Z_1(u) = \max\left\{ \frac{H_1(u)}{B_1}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 \mid \mathcal{F}_1](u) \right\} = \max\left\{ \frac{800}{7}, \frac{11675}{98} \right\} = \frac{11675}{98}$$

$$Z_1(d) = \max\{100, 100\} = 100$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \max\left\{ \frac{H_0}{B_0}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_1 \mid \mathcal{F}_0] \right\} \\ &= \max\left\{ 100, \quad \frac{11675}{98} \cdot \frac{5}{8} + 100 \cdot \frac{3}{8} \right\} = 111,9579 \end{aligned}$$

Für den Preis der Option zur Zeit $t = 0$ gilt also $\pi(H) = Z_0 = 111,9579$.

d) Die optimale Ausübungsstrategie ist gegeben durch

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 2, & \omega \in \{uu, ud\}, \\ 1, & \omega \in \{du, dd\}. \end{cases}$$

e) Die Aussage ist korrekt. Wäre der Preis der amerikanischen Garantieoption echt kleiner als der Startwert der Aktie, dann erhält man eine Arbitrage-Strategie durch Kauf der Garantieoption und Leerverkauf der Aktie. Das ist ein Widerspruch zur Arbitragefreiheit des Finanzmarkts.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 4 (1+1+1+2=5 Punkte)

a) Seien $\mu, \nu \in \mathcal{P}$. Dann dominiert μ das Maß ν im Sinne der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung, falls gilt:

$$\int U d\mu \geq \int U d\nu,$$

für alle Nutzenfunktionen U für die die Erwartungswerte existieren.

b) Für beliebige $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $\mu \succeq_{SSD} \nu$.

ii) $\int f d\mu \geq \int f d\nu$ für alle wachsenden, konkaven Funktionen f.

iii) Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt $\int (c-x)^+ \mu(dx) \leq \int (c-x)^+ \nu(dx)$.

iv) Für die Verteilungsfunktionen F_μ und F_ν gilt:

$$\int_{-\infty}^{c} F_\mu(x) dx \leq \int_{-\infty}^{c} F_\nu(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

v) Für die Quantilfunktionen F_μ^{-1} und F_ν^{-1} gilt:

$$\int_0^t F_\mu^{-1}(s) ds \geq \int_0^t F_\nu^{-1}(s) ds, \quad 0 < t \leq 1.$$

Hier reicht es, eine Charakterisierung zu nennen.

c) Es gilt für beliebiges $z \in \mathbb{R}$:

$$F\left(\frac{1}{2}Z \leq z\right) = F(Z \leq 2z) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{2} \cdot 2z} = 1 - e^{-\lambda z}.$$

Das entspricht gerade der Verteilungsfunktion einer $Exp(\lambda)-$verteilten Zufallsvariable.

d) $U(\cdot)$ ist genau dann eine Nutzenfunktion, wenn $U(\frac{1}{2}\cdot)$ eine Nutzenfunktion ist. Daher gilt

$$X + Y \succeq Z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(X+Y) \succeq \frac{1}{2}Z.$$

Nun folgt aufgrund der Konkavität der Nutzenfunktion un der Monotonie des Erwartungswertes direkt aus der Definition der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung

$$\mathbb{E}\left[U\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}U(X) + \frac{1}{2}U(Y)\right] = \mathbb{E}[U(X)] \overset{X \sim \frac{1}{2}Z}{=} \mathbb{E}\left[U\left(\frac{1}{2}Z\right)\right].$$

Hier ist zu beachten, dass $\frac{1}{2}Z \sim \text{Exp}(\lambda)$.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 5 (5+3=8 Punkte)

a) Wir bestimmen zunächst das optimale Endvermögen. Es gilt nach Vorlesung

$$X^* = I(y^* Z).$$

Zu I:

$$U' : \mathbb{R} \to (0,\infty), \qquad U'(x) = e^{-x}.$$
$$I : (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad I(y) = -\log(y).$$

Zu Z: Zunächst ist hier $q = \frac{1}{2}$. Das risikoneutrale Maß $\mathbb{Q}$ ist also gegeben durch

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}, \qquad \omega \in \{uu, ud, du, dd\}.$$

Hier fällt auf, dass das Maß $\mathbb{Q}$ mit dem Maß $\mathbb{P}$ übereinstimmt, ein Maßwechsel ist also gar nicht notwendig. Es ergibt sich

$$Z(\omega) := \frac{1}{B_T} \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)} \equiv 1, \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

Zu y^*: Der Lagrange-Multiplikator ergibt sich aus der Nebenbedingung:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X^*}{B_T}\right] \overset{!}{=} x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[X^*] = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}[I(y^*)] = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad I(y^*) = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad -\log(y^*) = x_0 \\
&\Leftrightarrow \quad y^* = e^{-x_0}
\end{aligned}$$

Damit ist das optimale Endvermögen schließlich:

$$X^* = I(y^* Z) = -\log(e^{-x_0}) \equiv x_0.$$

Das optimale Endvermögen entspricht also schlicht dem Anfangsvermögen. Eine optimale Investitionsstrategie ergibt sich daraus sofort, indem man das gesamte Anfangsvermögen über die zwei Perioden in den zinslosen Bond anlegt.

b)

$$\begin{aligned}
&U_1(U_2^{-1}(t)) \text{ ist strikt konkav} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} U_1(U_2^{-1}(t)) = \frac{U_1'(U_2^{-1}(t))}{U_2'(U_2^{-1}(t))} \downarrow \\
&\Leftrightarrow \log \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)} \downarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \log \frac{U_1'(x)}{U_2'(x)} < 0 \\
&\Leftrightarrow A_1(x) - A_2(x) > 0.
\end{aligned}$$

Alternativ kann die Aussage auch durch direktes Nachrechnen gezeigt werden.

Lösungsvorschlag: Aufgabe 6 (1.5+1.5+2+2=7 Punkte)

Seien $X, Y \in L^2$. Wir überprüfen Varianz und Standardabweichung darauf, ob sie die folgenden Eigenschaften besitzen:

a) Translationsinvarianz: Es gilt $\operatorname{Var}(X+m) = \operatorname{Var}(X)$ und $\operatorname{Std}(X+m) = \operatorname{Std}(X)$ für $m \in \mathbb{R}$, also keine Translationsinvarianz.

b) Positive Homogenität: Es gilt $\operatorname{Var}(\alpha X) = \alpha^2 \operatorname{Var}(X)$ und $\operatorname{Std}(\alpha X) = \alpha \operatorname{Std}(X)$ für $\alpha \geq 0$, also ist die Standardabweichung positiv homogen, die Varianz hingegen nicht.

c) Monotonie: Wir geben ein Gegenbeispiel an. Seien dafür X und Y beschränkte Zufallsvariablen (insbesondere $X, Y \in L^2$) mit $\operatorname{Var}(X) > \operatorname{Var}(Y)$. Wegen der Beschränktheit findet man ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass $X + \gamma \geq Y$. Nun gilt $\operatorname{Var}(X+\gamma) = \operatorname{Var}(X) > \operatorname{Var}(Y)$ und analog $\operatorname{Std}(X+\gamma) > \operatorname{Std}(Y)$. Also gilt in keinem Fall Monotonie.

d) Subadditivität: Wegen $\operatorname{Var}(X+Y) = \operatorname{Var}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Var}(Y)$ ist die Varianz im Allgemeinen (für positiv korellierte) Zufallsvariablen nicht subadditiv. Der Erwartungswert des Produkts zweier Zufallsvariablen ist ein Skalarprodukt auf L^2. Mit Cauchy-Schwarz gilt daher

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\left[\underbrace{(X - \mathbb{E}[X])}_{=:\tilde{X}}\underbrace{(Y - \mathbb{E}[Y])}_{=:\tilde{Y}}\right] \\
&= \int \tilde{X}\tilde{Y}\, d\mathbb{P} \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \left(\int \tilde{X}^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int \tilde{Y}^2 d\mathbb{P}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{\mathbb{E}\left[\tilde{X}^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\tilde{Y}^2\right]} \\
&= \sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)}.
\end{aligned}$$

Wir folgern

$$\begin{aligned}
\operatorname{Std}(X+Y) &= \sqrt{\operatorname{Var}(X+Y)} \\
&= \sqrt{\operatorname{Var}(X) + 2\operatorname{Cov}(X,Y) + \operatorname{Var}(Y)} \\
&\leq \sqrt{\operatorname{Var}(X) + 2\sqrt{\operatorname{Var}(X)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y)} + \operatorname{Var}(Y)} \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{\operatorname{Var}(X)} + \sqrt{\operatorname{Var}(Y)}\right)^2} \\
&= \operatorname{Std}(X) + \operatorname{Std}(Y),
\end{aligned}$$

also ist zumindest die Standardabweichung subadditiv.