Fasen-Hartmann
Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer: 120 min. Lösung: offiziell Bestanden mit: 16 P.

Bemerkungen: Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei ein T-periodiges Cox-Ross-Rubinstein Modell mit einer Aktie mit Preisprozess $(S_t)_{t\in\{0,1,\dots,T\}}$, $u = 2$ und $d = 3/5$, sowie $S_0 = 60$. Der Bond hat einen Zinssatz von $r = 0.3$ mit $B_0 = 1$. Ein Investor kauft eine europäische Fixed-Strike-Average Option H auf diese Aktie mit Strikepreis $K = 79.5$. Die Auszahlung der Option H ist zur Fälligkeit T gegeben durch

$$H = \left(\left(\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} S_t\right) - K\right)^+.$$

Wir betrachten nun den 2-Perioden Fall.

a) Bestimmen Sie die Auszahlung H der Option.

b) Geben Sie die Hedging-Strategie (α_0, β_0) für H zum Zeitpunkt $t = 0$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei ein T-periodiger, arbitragefreier und vollständiger endlicher Finanzmarkt mit einer Aktie $(S_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ mit deterministischem Startwert $S_0 > 0$ und einem risikolosen Bond $(B_t)_{t\in\{0,\dots,T\}}$ mit $B_0 = 1$ und Zinsrate $r > 0$ gegeben. Ferner sei der über die Zeit mittlere Aktienpreis definiert als

$$\overline{S}_T := \frac{1}{1+T}\sum_{t=0}^{T} S_t.$$

Die Auszahlungen einer asiatischen Call-Option H und einer asiatischen Put-Option $\widetilde{H}$ sind gegeben durch

$$H = (S_T - \overline{S}_T)^+ \quad \text{und} \quad \widetilde{H} = (\overline{S}_T - S_T)^+.$$

Zeigen Sie, dass die fairen Preise $\Pi(H)$ von H und $\Pi(\widetilde{H})$ von $\widetilde{H}$ die Gleichung

$$\Pi(H) - \Pi(\widetilde{H}) = S_0 - \frac{1}{1+T}\frac{S_0}{(1+r)^T}\frac{(1+r)^{T+1}-1}{(1+r)-1}$$

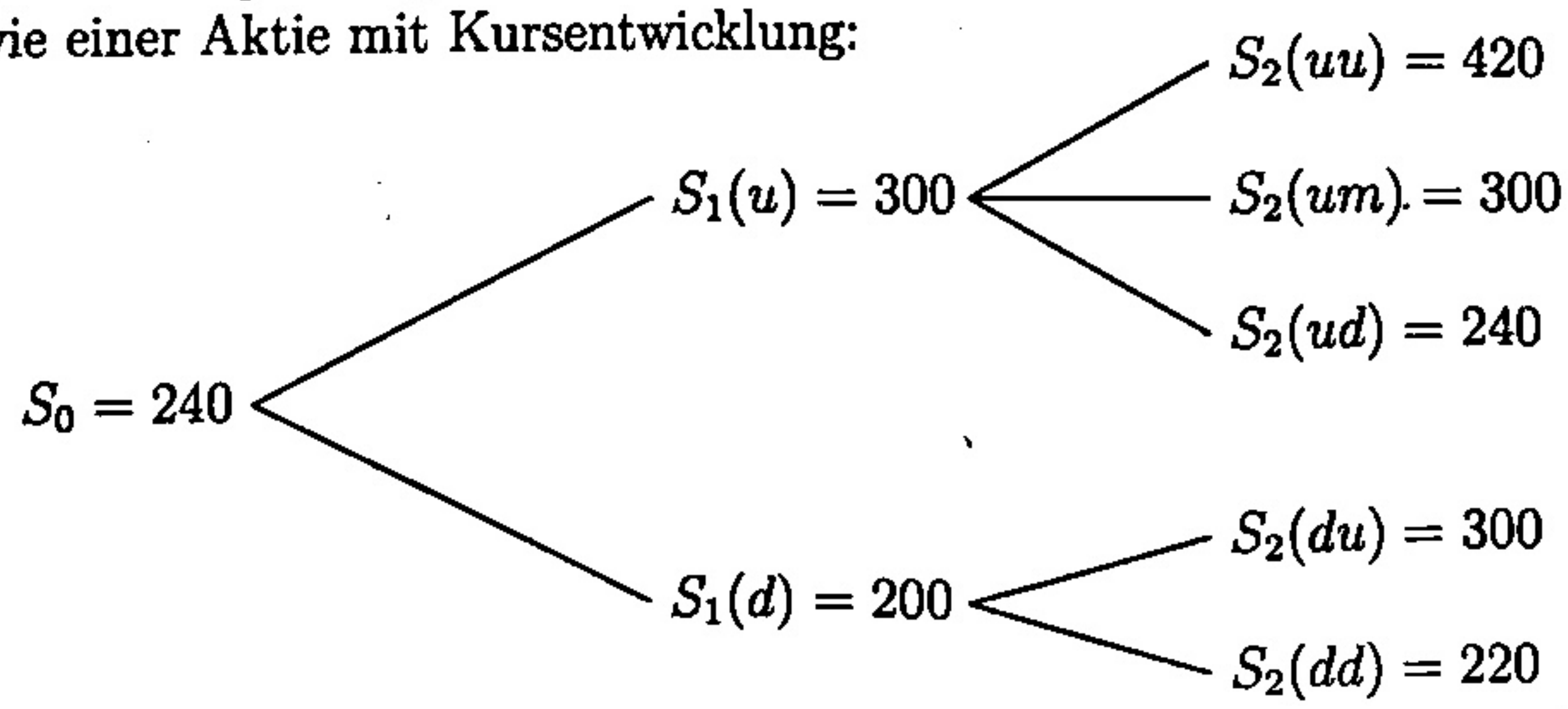
erfüllen.

Hinweis: Sie können verwenden, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} c^k = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}.$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit einem Bond mit $B_0 = 1$ und Zinssatz $r = 0.2$ sowie einer Aktie mit Kursentwicklung:



Gegeben seien die Zahlungsansprüche H^1 und H^2, wobei

i) H^1 eine europäische Call Option auf die obige Aktie mit Fälligkeit $T = 2$ und Strikepreis $K = 300$ ist,

ii) H^2 eine europäische Put Option auf obige Aktie mit Fälligkeit $T = 2$ und Strikepreis $K = 230$ ist.

Untersuchen Sie, ob die Zahlungsansprüche H^1 und H^2 erreichbar sind und geben Sie gegebenenfalls die fairen Preise an.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 2$ und $r = \frac{1}{2}$. Wir betrachten eine amerikanische Option mit der Auszahlung

$$H_t = \max\{\min\{S_t, 4\}, K\}, \quad t = 0, 1, 2,$$

wobei $K \in (1, 2]$. Bestimmen Sie die Menge aller $K \in (1, 2]$, sodass der optimale Ausübungszeitpunkt der Option zum Zeitpunkt 1 ist.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Es sei ein arbitragefreier, zweiperiodiger Finanzmarkt gegeben mit einem risikolosen Bond mit konstanter Zinsrate $r = \frac{1}{4}$ und einer Aktie mit Preisverlauf

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & S_2(uu) = 200 \\
 & S_1(u) = 40 \arrow[ur] \arrow[r] & S_2(ud) = 25 \\
S_0 = 8 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
 & & S_2(du) = 25 \\
 & S_1(d) = 5 \arrow[ur] \arrow[r] & S_2(dd) = \frac{25}{8}
\end{tikzcd},$$

wobei jeder Pfad mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftritt.
Mit Anfangsvermögen $v_0 \in (0, \infty)$ sei das Portfolio-Optimierungsproblem

$$(P) \quad \begin{cases} \sup_\pi \mathbb{E}[-\frac{1}{3}(V_2^\pi)^{-3}], \\ V_0^\pi = v_0 \in (0,\infty) \quad \text{und} \quad V_1^\pi, V_2^\pi \in (0,\infty) \end{cases}$$

gegeben.

a) Begründen Sie, warum $U(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$, $x > 0$, eine Nutzenfunktion ist.

b) Bestimmen Sie die Verteilung der Renditen R_i der diskontierten Aktie, $i = 1, 2$ und den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[(1 + aR_i)^{-3}] \quad \text{für jedes } a \in (-\frac{1}{3}, 2).$$

c) Gegeben seien die Funktion

$$h(a) = \frac{1}{2}\left((1 + 3a)^{-3} + (1 - \frac{a}{2})^{-3}\right), \quad a \in (-\frac{1}{3}, 2),$$

mit $a^* := \operatorname{argmin}_{a \in (-\frac{1}{3}, 2)} h(a)$ und die Konstante $K := \frac{64}{125} h(a^*)$. Zeigen Sie mit Hilfe dynamischer Programmierung (die Überprüfung der Voraussetzung ist nicht nötig), dass

$$\sup_{\substack{V_0^\pi = v_0, \\ V_1^\pi, V_2^\pi \in (0,\infty)}} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{3}(V_2^\pi)^{-3}\right] = -\frac{K^2}{3} v_0^{-3}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Eine Pareto-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\alpha > 1$ besitzt die Verteilungsfunktion

$$F_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{x}\right)^\alpha & , \quad x > 1, \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

mit Erwartungswert $\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$.
Im Folgenden seien $X \sim \text{Pareto}(\alpha)$ und $Y \sim \text{Pareto}(\beta)$-verteilt mit Parametern $\alpha, \beta > 1$.

a) Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$X \preceq_{\text{SSD}} Y \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha \geq \beta.$$

b) Berechnen Sie den Average Value at Risk von X zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) Der Aktienkurs, der Wert von $\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} S_t$ und die Auszahlung von H/B_2 sind in dem folgendem Diagramm dargestellt.

$t=0$	$t=1$	$t=2$	$\frac{1}{T+1}\sum_{t=0}^{T} S_t$	H
$S_0 = 60$	$S_1(u) = 120$	$S_2(uu) = 240$	140	60.5
		$S_2(ud) = 72$	84	4.5
	$S_1(d) = 36$	$S_2(du) = 72$	56	0
		$S_2(dd) = 21.6$	39.2	0

b) Da $d < 1 + r < u$, ist $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{0.7}{1.4} = \frac{1}{2}$. Damit ergeben sich die Preise für $t = 1$ durch $\Pi_1(H, u) = \frac{10}{13}(\frac{1}{2}60.5 + \frac{1}{2}4.5) = 25$ und $\Pi_1(H, d) = 0$. Somit erhalten wir mit Satz 2.9 der Vorlesung

$$\alpha_0 = \frac{\Pi_1(H,u) - \Pi_1(H,d)}{(u-d)S_0} = \frac{25}{84} = 0.2976$$

und

$$\beta_0 = \frac{u\Pi_1(H,d) - d\Pi_1(H,u)}{(u-d)(1+r)} = \frac{-15}{1.82} = -8.2418.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es gilt

$$H = (S_T - \overline{S}_T)^+ = \max(0, S_T - \overline{S}_T) = \max(\overline{S}_T - S_T, 0) + S_T - \overline{S}_T = \widetilde{H} + S_T - \overline{S}_T.$$

Da der Markt arbitragefrei und vollständig ist, existiert ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und wir können die risikoneutrale Bewertungsformel anwenden. Zudem ist $(\frac{S_t}{B_t})_{t\in\{0,\dots,T\}}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal, so dass

$$\begin{aligned}
\Pi(H) - \Pi(\widetilde{H}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T} - \frac{\widetilde{H}}{B_T}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T}{B_T} - \frac{\overline{S}_T}{B_T}\right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{S_T}{B_T}\right] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{1+T}\sum_{t=0}^{T}\frac{S_t}{B_T}\right] \\
&= S_0 - \frac{1}{1+T}\frac{S_0}{B_T}\sum_{t=0}^{T} B_t \\
&= S_0 - \frac{1}{1+T}\frac{S_0}{(1+r)^T}\sum_{t=0}^{T}(1+r)^t \\
&= S_0 - \frac{1}{1+T}\frac{S_0}{(1+r)^T}\frac{(1+r)^{T+1}-1}{(1+r)-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte) Wir berechnen im Folgenden die Menge der äquivalenten Martingalmaße. Dabei sei $\mathbb{Q}(\{i,j\}) = q(i)q(j|i), i \in \{u,d\}$ und $j \in \{u,m,d\}$. Da in dem ersten Teilbaum die Aktie mit $u = \frac{5}{4}$ bzw. $d = \frac{5}{6}$ steigt bzw. fällt, und $d < 1 + r < u$ gilt, erhalten wir $q(u) = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{22}{25}$ und $q(d) = \frac{3}{25} \in (0,1)$. In dem unteren Teilbaum ($t = 1, d$-Zustand) erhalten wir $u_1 = \frac{3}{2}$ und $d_1 = \frac{11}{10}$, somit gilt $d_1 < 1 + r < u_1$, und wir erhalten $q(u|d) = \frac{1}{4}$ und $q(d|d) = \frac{3}{4} \in (0,1)$. Als nächstes betrachten wir den oberen Teilbaum ($t = 1, u$-Zustand). Für ein äquivalentes Martingalmaß muss gelten

$$q(u|u) + q(m|u) + q(d|u) = 1,$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{S_2}{B_2}|\mathcal{F}_1(u)] = \frac{S_1}{B_1}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tfrac{300}{1.2} &= \frac{1}{1.2^2}(420q(u|u) + 300q(m|u) + 240(1 - q(u|u) - q(m|u)) \\
\Leftrightarrow \quad 300 \cdot 1.2 - 240 &= 180q(u|u) + 60q(m|u) \\
\Leftrightarrow \quad 2 &= 3q(u|u) + q(m|u).
\end{aligned}$$

Wir wählen $q(m|u) = q \in (0,1)$ als freien Parameter. Es folgt

$$q(u|u) = \frac{2}{3} - \frac{q}{3}$$

und

$$q(d|u) = 1 - q(u|u) - q(m|u) = 1 - \frac{2}{3} + \frac{q}{3} - q = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}q.$$

Zusätzlich muss gelten $q(i|u) \in (0,1), i \in \{u,m,d\}$. Also

$$q(u|u) = \frac{2}{3} - \frac{q}{3} \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad q \in (-1,2),$$
$$q(d|u) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}q \in (0,1) \quad \Leftrightarrow \quad q \in (-1,\frac{1}{2}).$$

Insgesamt folgt $q \in (0,1/2)$. Somit ist die Menge aller äquivalenten Martingalmaße gleich

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^* = \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q}(\{i,j\}) = q(i)q(j|i), q(u) = 1 - q(d) = \frac{22}{25}, q(u|d) = 1 - q(d|d) = \frac{1}{4}, \\
q(u|u) = \frac{2}{3} - \frac{q}{3}, q(m|u) = q, q(d|u) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}q, q \in (0,1/2)\}.
\end{aligned}$$

i) Der erste Zahlungsanspruch ist gegeben durch $H^1 = (S_2 - 300)^+$ und hat die Auszahlungen $H^1(uu) = 120, H^1(um) = H^1(ud) = H^1(du) = H^1(dd) = 0$. Damit ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H^1}{B_2}\right] = \frac{100}{144}\left(\frac{22}{25}(\frac{2}{3} - \frac{q}{3})120\right) = \frac{440}{9} - \frac{220}{9}q.$$

Damit gilt

$$\Pi^-(H^1) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H^1}{B_2}\right] = \frac{440}{9} - \frac{220}{9}\frac{1}{2} = \frac{330}{9} = \frac{110}{3}$$

für $q = \frac{1}{2}$ und

$$\Pi^+(H^1) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H^1}{B_2}\right] = \frac{440}{9}$$

für $q = 0$. Es folgt, dass die arbitragefreien Preise von $\Pi(H^1)$ im Intervall $(\frac{110}{3}, \frac{440}{9})$ liegen und der Zahlungsanspruch nicht erreichbar ist.

ii) Der zweite Zahlungsanspruch ist gegeben durch $H^2 = (230 - S_2)^+$ und hat die Auszahlungen $H^2(uu) = H^2(um) = H^2(ud) = H^2(du) = 0, H^2(dd) = 10$. Damit ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H^2}{B_2}\right] = \frac{100}{144}\frac{3}{25}\frac{3}{4}10 = \frac{5}{8}.$$

Es folgt, dass der arbitragefreie Preis von $\Pi(H^2) = \frac{5}{8}$ eindeutig ist und damit ist H^2 erreichbar.

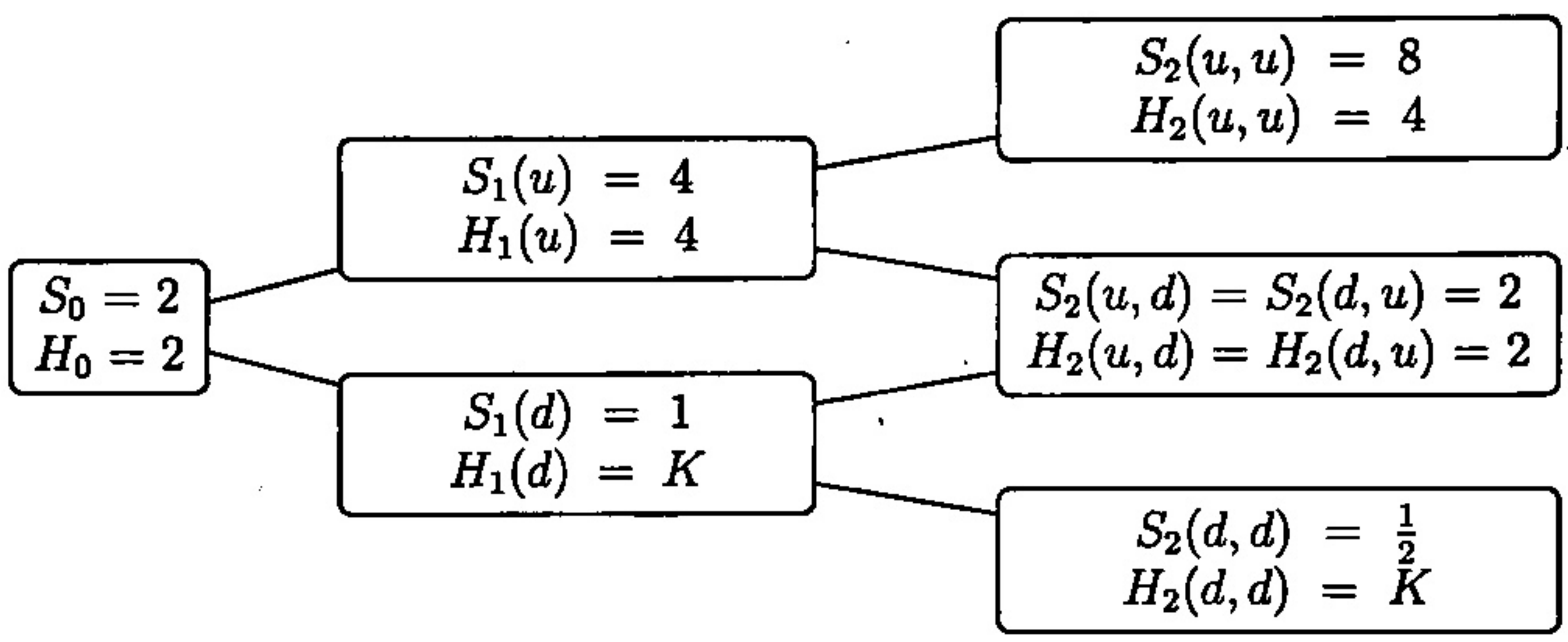
Aufgabe 4 (8 Punkte) Es sei $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\}$. Das gegebene CRR-Modell ist arbitragefrei und vollständig, da $d < 1 + r < u$. Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist durch den Parameter

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{2}{3}$$

eindeutig festgelegt. Die risikolose Anlage folgt dem deterministischen Verlauf

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{3}{2}, \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

Die möglichen Entwicklungen des risikobehafteten Wertpapieres und der amerikanischen Option sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



Für den optimalen Ausübungszeitpunkt τ^* gilt

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : Z_t = H_t B_t^{-1}\}$$

und somit bestimmen wir im folgenden K, sodass $\tau^* = 1$ gilt. Dafür bestimmen wir die Snell-Einhüllende $Z = (Z_t)_{t=0,1,2,3}$ von $(H_t B_t^{-1})_{t=0,1,2,3}$ als

$$\begin{aligned} Z_2 &:= \frac{H_2}{B_2}, \\ Z_t &:= \max\left\{\frac{H_t}{B_t}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\right\}, \quad t = 0, 1. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} &Z_2(u,u) = \frac{16}{9}, \quad Z_2(u,d) = Z(d,u) = \frac{8}{9}, \quad Z_2(d,d) = \frac{4}{9}K, \\ &Z_1(u) = \max\left\{\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\cdot\frac{16}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}\right\} = \max\left\{\frac{8}{3}, \frac{40}{27}\right\} = \frac{8}{3}, \\ &Z_1(d) = \max\left\{\frac{2}{3}K, \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\cdot 2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}K\right\} = \frac{2}{3}\max\left\{K, \frac{8}{9} + \frac{2}{9}K\right\}. \end{aligned}$$

Für den up-Zustand gilt, dass $Z_1(u) = H_1(u)B_1^{-1}$. Damit auch für den down-Zustand $Z_1(d) = H_1(d)B_1^{-1}$ gilt, muss $K \geq \frac{8}{9} + \frac{2}{9}K$ gelten. Dies ist erfüllt, wenn $K \geq \frac{8}{7}$. Für $t = 0$ erhalten wir

$$Z_0 = \max\left\{2, \frac{2}{3}\cdot\frac{8}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}K\right\} = \frac{16}{9} + \frac{2}{9}K,$$

da $K \geq 1$. Also ist $Z_0 > H_0$ und $\tau^* = 1$, genau dann wenn $K \geq \frac{8}{7}$.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

a) $U : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $U(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}$ ist eine Nutzenfunktion, denn mit $U'(x) = x^{-4} > 0$ und $U''(x) = -4x^{-5} < 0$ ist U streng wachsend und streng konkav . Zudem ist U stetig.

b) Es handelt sich hier um ein CRR-Modell mit $u = 5$ und $d = \frac{5}{8}$. Damit sind die Renditen R_1 und R_2 uiv mit

$$R_i(u) = \frac{u}{1+r} - 1 = 5 \cdot \frac{4}{5} - 1 = 3$$

und

$$R_i(d) = \frac{d}{1+r} - 1 = \frac{5}{8}\frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{2}$$

jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/2 für $i = 1, 2$. Weiter gilt

$$\mathbb{E}[(1 + aR_i)^{-3}] = \frac{1}{2}\left((1+3a)^{-3} + (1 - \frac{a}{2})^{-3}\right) = h(a).$$

c) Die Wertfunktion für den Zeitpunkt $t = 2$ ist gegeben durch

$$J_2(x) = U(x) = -\frac{1}{3}x^{-3}.$$

Da $V_{i+1}^\pi = (1+r)(V_i^\pi + \phi R_i)$ wieder größer Null sein muss ($i = 0, 1$), muss ϕ so gewählt werden, dass $x - \phi\frac{1}{2} > 0$ und $x + \phi 3 > 0$, was äquivalent ist zu $\phi \in (-\frac{1}{3}x, 2x)$. Für den Zeitpunkt $t = 1$ gilt dann für die Wertfunktion

$$\begin{aligned}
J_1(x) &= \sup_{\phi \in (-\frac{1}{3}x, 2x)} \mathbb{E}[J_2((1+r)(x + \phi R_2))] \\
&= \sup_{a \in (-\frac{1}{3}, 2)} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{4}(x + axR_2)\right)^{-3}\right] \\
&= -\frac{64}{3 \cdot 125}x^{-3} \inf_{a \in (-\frac{1}{3}, 2)} \mathbb{E}[(1 + aR_2))^{-3}] \\
&= -\frac{64}{3 \cdot 125}x^{-3} \inf_{a \in (-\frac{1}{3}, 2)} h(a) \\
&= -\frac{K}{3}x^{-3} = K J_2(x).
\end{aligned}$$

Damit folgt für den Anfangszeitpunkt aufgrund der identischen Verteilung der Renditen

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{V_0^\pi = v_0, \\ V_1^\pi, V_2^\pi \in (0,\infty)}} \mathbb{E}\left[-\frac{1}{3}(V_2^\pi)^{-3}\right] &= J_0(x) \\
&= \sup_{\phi \in (-\frac{x}{3}, 2x)} \mathbb{E}[J_1((1+r)(x + \phi R_1))] \\
&= K \sup_{\phi \in (-\frac{x}{3}, 2x)} \mathbb{E}[J_2((1+r)(x + \phi R_1))] \\
&= -\frac{K^2}{3}x^{-3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

a) „$\Leftarrow$ ": Da für $s > 1$ gilt

$$F_\alpha(s) \geq F_\beta(s) \quad \Leftrightarrow \quad s^{-\alpha} \leq s^{-\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \geq \beta,$$

folgt aus $\alpha \geq \beta$, dass

$$\int_{-\infty}^{t} F_\alpha(s)ds \geq \int_{-\infty}^{t} F_\beta(s)ds \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

was $X \preceq_{\mathrm{SSD}} Y$ impliziert.

„$\Rightarrow$ ": Es sei $X \preceq_{\mathrm{SSD}} Y$. Nach der Vorlesung ist dann $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$. Wir erhalten dann

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{\alpha-1} = \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y] = \frac{\beta}{\beta-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{\beta}},$$

was $\alpha \geq \beta$ entspricht.

b) Da F_α stetig und streng monoton wachsend ist, erhalten wir für $\lambda \in (0,1)$

$$\begin{aligned} VaR_\lambda(X) &= -\inf\{z \in \mathbb{R} : F_\alpha(z) > \lambda\} = -\inf\left\{z \in (1,\infty) : 1 - \left(\frac{1}{z}\right)^\alpha > \lambda\right\} \\ &= -\inf\left\{z \in (1,\infty) : \frac{1}{(1-\lambda)^{1/\alpha}} < z\right\} = \frac{-1}{(1-\lambda)^{1/\alpha}}. \end{aligned}$$

Mit der Definition des $AVaR$ folgt

$$\begin{aligned} AVaR_\lambda(X) &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\gamma(X)\mathrm{d}\gamma \\ &= \frac{-1}{\lambda}\int_0^\lambda (1-\gamma)^{-1/\alpha}\mathrm{d}\gamma \\ &= \frac{-1}{\lambda}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\gamma)^{-1/\alpha+1}\right]_{\gamma=0}^{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\alpha}{1-\alpha}(1-\lambda)^{-1/\alpha+1} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right] \\ &= -\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1-(1-\lambda)^{-1/\alpha+1}}{\lambda}. \end{aligned}$$