Mathematik Fachschaft Informatik
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Umbruch von Luca
Version 1 03.06.2025

WS 24/25 31.03.2025

Fasen-Hartmann

Finanzmathematik in diskreter Zeit

Dauer:	120 min.	Lösung:	offiziell	Bestanden mit:	16 P.

Bemerkungen: Hilfsmittel: nicht-programmierbarer, nicht-vernetzbarer Taschenrechner

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger, arbitragefreier CRR-Finanzmarkt mit risikobehafteter Anlage $S_0 = 100$ und $u = \frac{1}{d}$. Zudem sei der Bond normiert mit Zinsrate $r = 0$.

a) Das äquivalente Martingalmaß erfülle $\mathbb{Q}(\{u\}) = \frac{1}{3} = 1 - \mathbb{Q}(\{d\})$. Bestimmen Sie den Preis der risikobehafteten Anlage zum Zeitpunkt 1.

b) Es sei H eine europäische Call-Option mit Strikepreis $K > 0$ und Preis $\Pi(H) = 10$ zum Anfangszeitpunkt $t = 0$. Bestimmen Sie K.

c) Geben Sie eine Hedgingstrategie für den europäischen Call aus b) an.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Finanzmarkt mit normiertem Bond mit Zinsrate $r = 0.5$ sowie einer Aktie mit Startpreis $S_0 = n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Der Endkurs $S_1 \sim U(\{1, 2, \dots, 3n\})$ sei eine Gleichverteilung auf $\{1, 2, \dots, 3n\}$.

a) Untersuchen Sie für $n \geq 3$ den Markt auf Arbitragefreiheit.

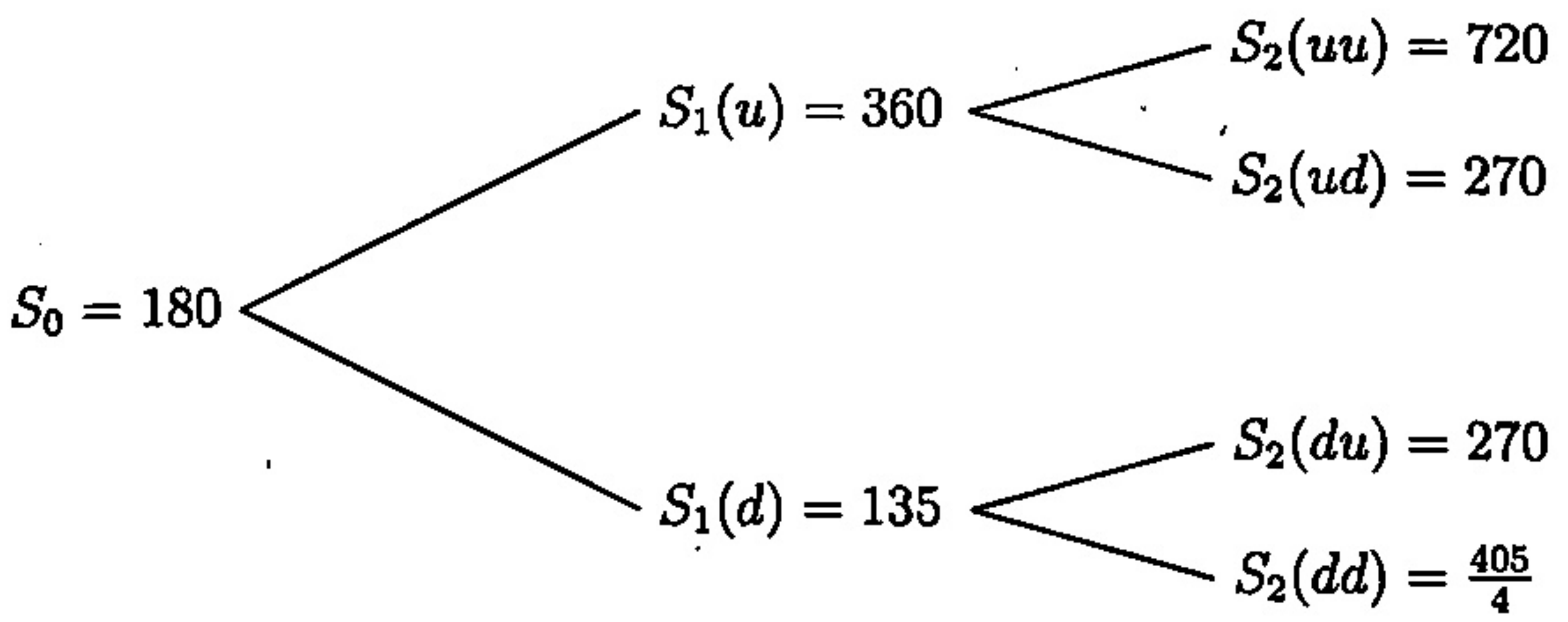
b) Es sei $n = 1$.

b1) Untersuchen Sie den Markt auf Vollständigkeit.

b2) Gegeben sei eine europäische Put Option mit Strikepreis $K = 2$ und Fälligkeit $T = 1$ auf die Aktie. Bestimmen Sie die fairen Preise dieser europäischen Put Option.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt bestehend aus einem Bond mit Startwert $B_0 = 1$ und einer Zinsrate $r = 50\%$ sowie einer Aktie mit Preisentwicklung:



Wir betrachten eine amerikanische Option mit der Auszahlung

$$H_t = \max\{S_t - 45, K\}, \quad t = 0, 1, 2,$$

wobei $K \in (90, 135]$. Bestimmen Sie die Menge aller $K \in (90, 135]$, sodass der optimale Ausübungszeitpunkt der Option zum Endzeitpunkt 2 ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei ein Finanzmarkt mit zwei unkorrelierten, riskanten Wertpapieren A und B, mit erwarteter Rendite 6 von A und 1 von B, wobei die Varianz der Rendite von B gleich 1 ist. Das Minimum-Varianz-Portfolio hat eine erwartete Rendite von 4.

a) Bestimmen Sie die Varianz der Rendite von Wertpapier A.

b) Berechnen Sie die Varianz des Minimum-Varianz-Portfolios.

c) Bestimmen Sie ein Portfolio, das sowohl ein Grenzportfolio des obigen Markowitz-Modells als auch des Tobin-Modells ist, das neben den beiden risikobehafteten Anlagen zusätzlich ein risikoloses Wertpapier besitzt, was mit 20% verzinst wird.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sei ein einperiodiger Finanzmarkt mit normiertem Bond (d.h. $B_0 = 1$) sowie Zinsrate $r = \frac{1}{3}$ und einer Aktie mit Preisentwicklung $S_0 = 3$ sowie

$$S_1(\omega) = \begin{cases} 2, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{3} \\ 10, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ein Investor mit Nutzen $U(x) = 2\log(x)$, $x > 0$, möchte eine Geldeinheit so anlegen, dass zur Zeit 1 sein erwarteter Endnutzen maximiert wird, d.h. es wird folgendes Optimierungsproblem betrachtet

$$(P) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi\in\Phi} \mathbb{E}(2\log V_1^{\varphi}) \\ V_0^{\varphi} = 1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie mit der Martingalmethode das optimale Endvermögen $V_1^{\varphi^*}$ für (P).

b) Bestimmen Sie die optimale Handelsstrategie $\varphi^* \in \Phi$ für (P).

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum,

$$L^1 := \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ messbar mit } \mathbb{E}|X| < \infty\}$$

und $\rho : L^1 \to \mathbb{R}$ sei ein monetäres Risikomaß. Die Akzeptanzmenge von ρ ist definiert als

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in L^1 : \rho(X) \leq 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Aus $X \in \mathcal{A}_\rho$, $Y \in L^1$ und $Y \geq X$ folgt $Y \in \mathcal{A}_\rho$.

b) Für $X \in L^1$ gilt $\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}_\rho\}$.

c) Wenn ρ konvex ist, dann ist $\mathcal{A}_\rho$ konvex (d.h. für $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ und $\lambda \in [0, 1]$ ist $\lambda X + (1 - \lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho$).

d) ρ ist genau dann positiv homogen, wenn $\mathcal{A}_\rho$ ein Kegel ist (d.h. für $X \in \mathcal{A}_\rho$ und $\lambda > 0$ ist $\lambda X \in \mathcal{A}_\rho$).

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Da es sich um einen arbitragefreien CRR-Finanzmarkt handelt, gilt mit $q = \mathbb{Q}(\{u\})$

$$\frac{1}{3} = q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1-\frac{1}{u}}{u-\frac{1}{u}}.$$

Dies ist Äquivalent zu $0 = u^2 - 3u + 2 = (u-2)(u-1)$. Da $u > 1$ gelten muss, ist die einzige Möglichkeit gegeben durch $u = 2$. Es folgt $d = \frac{1}{u} = \frac{1}{2}$ und somit $S_1(u) = 200$ und $S_1(d) = 50$.

b) Die europäische Call Option ist gegeben durch $H = (S_1 - K)_+$. Da $r = 0$ folgt

$$10 = \Pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(H) = \frac{1}{3}H(u) + \frac{2}{3}H(d) = \frac{1}{3}(200-K)_+ + \frac{2}{3}(50-K)_+.$$

Falls $K \leq 50$ wäre, würde $\frac{1}{3}(200-K) > 50 > \Pi(H)$ sein. Also muss $50 < K < 200$ gelten. Auflösen der Gleichung $10 = \frac{1}{3}(200-K)$ ergibt $K = 170$.

c) Es gilt $H(u) = 30$ und $H(d) = 0$. Dann ist nach Satz 2.3 eine Hedgingstrategie gegeben durch $\varphi = (\beta, \alpha)^\top$ mit

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{H(u)-H(d)}{(u-d)S_0} = \frac{30}{\frac{3}{2}100} = \frac{1}{5}, \\
\beta &= \frac{uH(d)-dH(u)}{(u-d)B_1} = \frac{-\frac{1}{2}30}{\frac{3}{2}} = -10.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Mit Satz 1.12 gilt:
Es existiert eine Arbitragestrategie genau dann, wenn eine $\mathcal{F}_0$-messbarer Zufallsvariable $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$\mathbb{P}(\eta(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0) \geq 0) = 1 \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(\eta(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0) > 0) > 0. \qquad (1)$$

Mit $B_1 = \frac{3}{2}$, gilt $\mathbb{P}(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0 = \frac{2j}{3} - n) = \frac{1}{3n}$ für $j = 1, \dots, 3n$. Da die Zufallsvariable η $\mathcal{F}_0$-messbar sein muss, ist sie konstant. Wir unterscheiden drei Fälle:

- $\eta = 0$: $\mathbb{P}(\eta(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0) > 0) = 0$, also ist die rechte Seite von (1) nicht erfüllt.
- $\eta > 0$: $\mathbb{P}(\eta(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0) < 0) > \mathbb{P}(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0 = \frac{2}{3} - n) = \frac{1}{3n}$, also ist die linke Seite von (1) nicht erfüllt.
- $\eta < 0$: $\mathbb{P}(\eta(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0) < 0) > \mathbb{P}(\widetilde{S}_1 - \widetilde{S}_0 = n) = \frac{1}{3n}$, also ist die linke Seite von (1) nicht erfüllt.

Demnach existiert keine Arbitragestrategie und der Markt ist arbitragefrei.

b1) $\widetilde{S}_1$ nimmt die Werte $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ und 2 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ an. Damit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{S}_1) = S_0 = 1$ gilt, muss für $q_1, q_2, 1 - q_1 - q_2 \in (0,1)$ die Gleichung

$$\frac{2}{3}q_1 + \frac{4}{3}q_2 + 2(1 - q_1 - q_2) = 1$$

gelten, was wiederum äquivalent zu

$$q_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}q_2, \quad q_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}q_2, \quad q_2 \in (0, \frac{1}{2})$$

ist. Schließlich ist

$$\mathcal{Q}^* = \left\{ \mathbb{Q} : \mathbb{Q}(\omega_1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}q_2, \mathbb{Q}(\omega_2) = q_2, \mathbb{Q}(\omega_3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}q_2, q_2 \in (0, \frac{1}{2}) \right\}$$

die Menge aller äquivalenten Martingalmaße. Da es unendlich viele äquivalente Martingalmaße gibt, ist der Markt nach dem 2. Fundamentalsatz des Asset Pricing nicht vollständig.

b2) Da $H = (K - S_1)^+$ ist, ergibt sich $H(\omega_1) = 1$ und $H(\omega_2) = H(\omega_3) = 0$. Zudem ist

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{H}{B_1}\right) = (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}q_2)\frac{2}{3}.$$

Daher gilt

$$\Pi^+(H) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{H}{B_1}\right) = \sup_{q_2\in(0,\frac{1}{2})} (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}q_2)\frac{2}{3} = \frac{1}{2},$$

sowie

$$\Pi^-(H) = \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}^*} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{H}{B_1}\right) = \inf_{q_2\in(0,\frac{1}{2})} (\frac{3}{4} - \frac{1}{2}q_2)\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Damit bildet das Intervall $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ die Menge aller fairen Preise.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Es sei $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\}$. Bei dem Finanzmarkt handelt es sich um ein CRR-Modell mit $u = 2$ und $d = \frac{3}{4}$. Das gegebene CRR-Modell ist arbitragefrei und vollständig, da $d < 1 + r < u$. Das äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist durch den Parameter

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{3}{5}$$

eindeutig festgelegt. Die risikolose Anlage folgt dem deterministischen Verlauf

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{3}{2}, \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

Die möglichen Entwicklungen des risikobehafteten Wertpapieres und der amerikanischen Option sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \boxed{\begin{array}{rcl} S_2(u,u) & = & 720 \\ H_2(u,u) & = & 675 \end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{rcl} S_1(u) & = & 360 \\ H_1(u) & = & 315 \end{array}} & & \\
\boxed{\begin{array}{l} S_0 = 180 \\ H_0 = 135 \end{array}} & & & & \boxed{\begin{array}{l} S_2(u,d) = S_2(d,u) = 270 \\ H_2(u,d) = H_2(d,u) = 225 \end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{rcl} S_1(d) & = & 135 \\ H_1(d) & = & K \end{array}} & & \\
 & & & & \boxed{\begin{array}{rcl} S_2(d,d) & = & \frac{405}{4} \\ H_2(d,d) & = & K \end{array}}
\end{array}$$

Für den optimalen Ausübungszeitpunkt τ^* gilt

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : Z_t = H_t B_t^{-1}\}$$

und somit bestimmen wir im folgenden K, sodass $\tau^* = 2$ gilt. Dafür bestimmen wir die Snell-Einhüllende $Z = (Z_t)_{t=0,1,2,3}$ von $(H_t B_t^{-1})_{t=0,1,2,3}$ als

$$Z_2 := \frac{H_2}{B_2},$$
$$Z_t := \max\left\{\frac{H_t}{B_t}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_{t+1} \mid \mathcal{F}_t]\right\}, \quad t = 0, 1.$$

Also

$$Z_2(u,u) = 300, \quad Z_2(u,d) = Z(d,u) = 100, \quad Z_2(d,d) = \frac{4}{9}K,$$
$$Z_1(u) = \max\left\{210, \frac{3}{5}\cdot 300 + \frac{2}{5}\cdot 100\right\} = \max\{210, 220\} = 220,$$
$$Z_1(d) = \max\left\{\frac{2}{3}K, \frac{3}{5}\cdot 100 + \frac{2}{5}\cdot\frac{4}{9}K\right\} = \frac{2}{3}\max\left\{K, 90 + \frac{4}{15}K\right\}.$$

Für den up-Zustand gilt, dass $Z_1(u) > H_1(u)B_1^{-1}$. Damit auch für den down-Zustand $Z_1(d) > H_1(d)B_1^{-1}$ gilt, muss $K < 90 + \frac{4}{15}K$ gelten. Dies ist erfüllt, wenn $K < \frac{1350}{11}$. Dann ist $Z_1(d) = 60 + \frac{8}{45}K$. Für $t = 0$ erhalten wir

$$Z_0 = \max\left\{135, \frac{3}{5}\cdot 220 + \frac{2}{5}\cdot(60 + \frac{8}{45}K)\right\} = 156 + \frac{16}{225}K,$$

da $135 < 156$ und $K > 0$. Also ist $Z_0 > H_0$ und $\tau^* = 2$, genau dann, wenn $K < \frac{1350}{11} = 122.7273$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Zuerst wird das Minimum-Varianz-Portfolio π^*_{MVP} bestimmt. Mit $m = (6,1)^\top$ muss auf der einen Seite $m^\top \pi^*_{MVP} = 6\pi^*_{MVP,1} + \pi^*_{MVP,2} = 4$ und auf der anderen Seite $e^\top \pi^*_{MVP} = \pi^*_{MVP,1} + \pi^*_{MVP,2} = 1$ sein. Die Lösung dieser beiden Gleichungen ergibt $\pi^*_{MVP} = (0.6, 0.4)^\top$. Weiter ist die Kovarianzmatrix der Renditen von der Form

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt

$$c = e^\top \Sigma^{-1} e = \frac{1}{\sigma^2} + 1 = \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \pi^*_{MVP} = \frac{1}{c}\Sigma^{-1}e = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2+1} \\ \frac{\sigma^2}{\sigma^2+1} \end{pmatrix}.$$

Demzufolge ist $\sigma^2 = \frac{2}{3}$.

b) Die minimale Varianz ist gegeben durch $\frac{1}{c} = \frac{2}{5} (= \pi^{*\top}_{MVP}\Sigma\pi^*_{MVP})$.

c) Gesucht ist das Tangentialportfolio, das gegeben ist durch

$$\pi^*_{\text{Tang}} = \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{a - R^0 c},$$

wobei $R^0 = 0.2$ und

$$a = m^\top \Sigma^{-1} e = (6,1)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = 10.$$

Einsetzen von R^0 und a ergibt

$$\pi^*_{\text{Tang}} = \frac{2}{19}\begin{pmatrix} 87/10 \\ 4/5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

a) Notiere $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ und setze $S_1(\omega_1) = 10$ und $S_1(\omega_2) = 2$. Der Markt lässt sich als einperiodiges CRR-Modell mit Kursfaktoren $u = \frac{10}{3}$ und $d = \frac{2}{3}$ sowie Zinsrate $r = \frac{1}{3}$ auffassen. Da $d < 1 + r < u$ gilt, ist der Markt arbitragefrei und vollständig. Es gilt $\mathbb{Q}(\{\omega_1\}) = q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1}{4}$ und $\mathbb{Q}(\{\omega_2\}) = 1 - q = \frac{3}{4}$. Weil nach Voraussetzung $\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{3}$ gilt, erhält man $L = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ mit $L(\omega_1) = \frac{\mathbb{Q}(\{\omega_1\})}{\mathbb{P}(\{\omega_1\})} = \frac{3}{8}$ und $L(\omega_2) = \frac{\mathbb{Q}(\{\omega_2\})}{\mathbb{P}(\{\omega_2\})} = \frac{9}{4}$. Die Nutzenfunktion U erfüllt $\lim_{x \searrow 0} U'(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{2}{x} = +\infty$ und $\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0$. Wegen $U'(x) = \frac{2}{x} = y \iff x = \frac{2}{y} =: (U')^{-1}(y)$ erhält man die Lösung $X^* = (U')^{-1}(\frac{c^* L}{B_1}) = \frac{2B_1}{c^* L}$. Der Lagrange-Parameter c^* muss die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 \overset{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X^*}{B_1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{LX^*}{B_1}\right] = \frac{2B_1}{c^* B_1}\mathbb{E}\left[\frac{L}{L}\right] = \frac{2}{c^*} \iff c^* = 2.$$

Das optimale Endvermögen ist also $X^* = \frac{B_1}{L}$ mit $X^*(\omega_1) = \frac{32}{9}$ und $X^*(\omega_2) = \frac{16}{27}$, was eine $\mathcal{F}_1$-messbare und positive Zufallsvariable ist.

b) Die optimale Handelsstrategie $(\alpha, \beta)^\top$ erhalten wir durch Hedgen von X^*:

$$\begin{bmatrix} \alpha S_1(\omega_1) + \beta B_1 = 10\alpha + \beta\frac{4}{3} = \frac{32}{9} = X^*(\omega_1) \\ \alpha S_1(\omega_2) + \beta B_1 = 2\alpha + \beta\frac{4}{3} = \frac{16}{27} = X^*(\omega_2) \end{bmatrix} \iff \alpha = \frac{10}{27},\ \beta = -\frac{1}{9}.$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

a) Aufgrund der Monotonie von ρ und $X \in \mathcal{A}_\rho$ folgt $Y \in \mathcal{A}_\rho$, da

$$\rho(Y) \le \rho(X) \le 0.$$

b) Sei $X \in L^1$. Aus der Translationsinvarianz folgt

$$\begin{aligned} \inf\{m \in \mathbb{R} : m + X \in \mathcal{A}_\rho\} &= \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(m + X) \le 0\} \\ &= \inf\{m \in \mathbb{R} : \rho(X) \le m\} = \rho(X). \end{aligned}$$

c) Sei ρ konvex sowie $X, Y \in \mathcal{A}_\rho$ und $\lambda \in [0,1]$. Dann gilt $\rho(X), \rho(Y) \le 0$ und aus der Konvexität erhalten wir

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \le \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y) \le 0.$$

Daraus folgt

$$\lambda X + (1-\lambda)Y \in \mathcal{A}_\rho.$$

d) „$\Rightarrow$“: Sei ρ positiv homogen. Sei $X \in \mathcal{A}_\rho$ und $\lambda > 0$. Dann gilt: $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X) \le 0$ und daher $\lambda X \in \mathcal{A}_\rho$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{A}_\rho$ ein Kegel, $X \in L^1$ und $\lambda > 0$. Dann ist $\rho(X + \rho(X)) \le 0$ und folglich $X + \rho(X) \in \mathcal{A}_\rho$. Wegen der Kegel-Eigenschaft erhalten wir $\lambda(X + \rho(X)) \in \mathcal{A}_\rho$. Daher folgt mit der Translationsinvarianz

$$0 \ge \rho(\lambda(X + \rho(X))) = \rho(\lambda X) - \lambda\rho(X) \Rightarrow \rho(\lambda X) \le \lambda\rho(X).$$

Auf der anderen Seite erhalten wir damit aber auch

$$\rho(X) = \rho(\frac{1}{\lambda}\lambda X) \le \frac{1}{\lambda}\rho(\lambda X).$$

Damit gilt die Gleichheit $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ und ρ ist positiv homogen.