Lösungsblatt 1

Aufgabe 1 (Was kostet der Call?)

Betrachten Sie einen einperiodigen Finanzmarkt bestehend aus einer risikolosen Anlage B mit Zins $r = 0$ und einem risikobehafteten Papier S. Zur Zeit $t = 0$ kosten die Titel $B_0 = 1$ bzw. $S_0 = 40$ Geldeinheiten und für S sind zwei Kursentwicklungen $S_1 = 60$ oder $S_1 = 30$ möglich, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten unbekannt sind. Was würden Sie für einen Europäischen Call auf S mit vereinbartem Basispreis $K = 50$ bezahlen?

Lösungsvorschlag:
Wir haben einen einperiodigen Binomialmarkt mit Zeithorizont $T = 1$ mit zinslosem Bond B, $B_0 = 1$, und Aktie S, $S_0 = 40$, weiter gilt $S_T(\omega_1) = 60$ und $S_T(\omega_2) = 30$, sowie $K = 50$.
Der Europäische Call zahlt $H = (S_T - K)^+$, das heißt $H(\omega_1) = (60-50)^+ = 10$ und $H(\omega_2) = (30-50)^+ = 0$.
Um einen fairen Preis angeben zu können, konstruieren wir ein replizierendes Portfolio. Dazu kommen wir ohne Kenntnis der objektiven Kursverlaufswahrscheinlichkeiten aus! Sei also (α, β) ein Portfolio. Replizieren bedeutet insbesondere, dass der Portfoliowert am Ende in jedem Fall mit dem Zahlungsanspruch übereinstimmen muss, also gilt notwendig

$$\begin{aligned} 60\alpha + 1\beta &= 10, \\ 30\alpha + 1\beta &= 0, \end{aligned}$$

woraus wir $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -10$ ablesen. Das selbe Portfolio hat zur Zeit $t = 0$ den Wert

$$V_0 = \alpha S_0 + \beta = \frac{1}{3} \cdot 40 - 10 = \frac{10}{3}$$

und das muss auch der Preis des Calls sein. Die empfohlene Handelsstrategie ist also, zu Beginn 10 Geldeinheiten bei der Bank zu leihen, den beschriebenen Call gegen Einnahme von weiteren $\frac{10}{3}$ Geldeinheiten zu verkaufen und mit dem Gesamtbetrag eine drittel Aktie zu erwerben.
Warum ist das der richtige und faire Preis? Wegen der Arbitragefreiheit. Denn wäre der Preis der Option höher, könnte man eine solche Option zum höheren Preis verkaufen und die billigere Strategie selbst handeln, womit man einen risikolosen Gewinn einstreicht. Wäre der Preis der Option niedriger, würde man die billigere Option einkaufen und obige replizierende Strategie verkaufen (das heißt alle Geschäfte mit verkehrtem Vorzeichen ausführen), womit man wieder risikolosen Gewinn erwirtschaftet. Das stünde im Widerspruch zu (NA).

Aufgabe 2 (Zinssatzbestimmung im einperiodigen Finanzmarkt)

Gegeben ist ein einperiodiger Finanzmarkt bestehend aus einem risikolosen Wertpapier und einer Aktie mit Preis $S_0 = 100$ zur Zeit $t = 0$ und $S_1(\omega_1) = 150$, $S_1(\omega_2) = 75$ zur Zeit $t = 1$. Weiter gibt es eine Option mit Auszahlung $H(\omega_1) = 29$ und $H(\omega_2) = 4$ zur Zeit $t = 1$, die zur Zeit $t = 0$ den Preis $\pi(H) = \frac{40}{3}$ besitzt. Wie groß ist der Zinssatz für das risikolose Wertpapier?

Lösungsvorschlag:
Wir haben einen einperiodigen Binomialmarkt zum Zeithorizont $T = 1$ mit Aktie S, wobei $S_0 = 100$, $S_1(\omega_1) = 150$ und $S_1(\omega_2) = 75$. Die Option mit Zahlungsanspruch H, wobei $H(\omega_1) = 29$ und $H(\omega_2) = 4$, besitzt den fairen Preis $\pi(H) = \frac{40}{3}$. Um die Zinsrate r des risikolosen Wertpapieres bestimmen zu können , konstruieren wir ein replizierendes Portfolio (α, β). Replizieren bedeutet insbesondere, dass der Portfoliowert zu Beginn mit dem Preis der Option und am Ende in jedem Fall mit dem Zahlungsanspruch übereinstimmen muss, also gilt

notwendigerweise

$$\pi(H) = \alpha S_0 + \beta, \tag{1}$$
$$H(\omega_1) = \alpha S_1(\omega_1) + (1+r)\beta, \tag{2}$$
$$H(\omega_2) = \alpha S_1(\omega_2) + (1+r)\beta. \tag{3}$$

Zieht man die dritte Gleichung von der zweiten ab, so erhält man

$$H(\omega_1) - H(\omega_2) = \alpha(S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2))$$

und somit

$$\alpha = \frac{H(\omega_1) - H(\omega_2)}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)} = \frac{29-4}{150-75} = \frac{1}{3}.$$

Eingesetzt in Gleichung (1) erhält man damit

$$\beta = \pi(H) - \alpha S_0 = \frac{40}{3} - \frac{1}{3}100 = -20$$

und schlussendlich

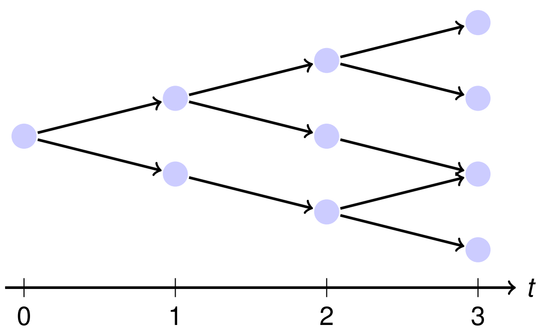
$$1 + r = \frac{H(\omega_1) - \alpha S_1(\omega_1)}{\beta} = \frac{29 - \frac{1}{3}150}{-20} = 1,05.$$

Damit beträgt die Zinsrate des risikolosen Wertpapieres $r = 5\%$.

Aufgabe 3 (Filtrationsbäumle)

Man kann diskrete endliche stochastische Prozesse als Bäume darstellen: Zuerst trägt man alle Zeitpunkte auf einer (z.B. horizontalen) Achse auf. Dann erstellt man zu jedem Zeitpunkt (z.B. vertikal darüber) für jeden zu dieser Zeit möglichen Zustand einen Knoten. Schließlich verbindet man die Knoten eines Zeitpunkts genau mit jenen Knoten des nächsten Zeitpunkts, zu denen es eine positive Übergangswahrscheinlichkeit gibt.

a) Betrachten Sie folgenden Baum, der einen stochastischen Prozess auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $\Omega := \{1,2,3,4,5\}$ repräsentiert:



Bestimmen Sie die natürliche Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,3}$ des Prozesses.

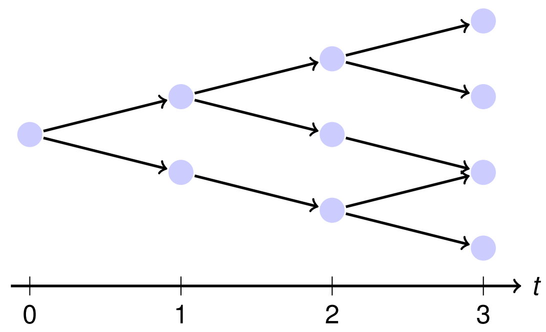
b) Ein anderer Prozess erzeuge die natürliche Filtration $(\mathcal{G}_s)_{s=0,1,2}$ mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\
\mathcal{G}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{1,2,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,3,4\}, \{4\}\}, \\
\mathcal{G}_2 &= \mathcal{P}(\Omega).
\end{aligned}$$

Geben Sie einen dazu passenden Wahrscheinlichkeitsraum an und finden Sie einen Baum zu diesem Prozess. Gibt es noch andere solche Bäume?

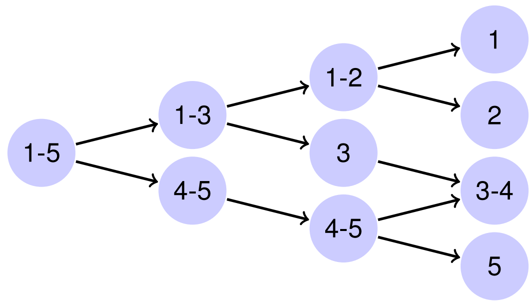
Lösungsvorschlag:

a) Gegeben ist $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ und (irgend)einem Maß $\mathbb{P}$, das genau den im folgenden Baum gezeigten Übergängen eine positive Wahrscheinlichkeit beimisst:



Gesucht ist die natürliche Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,3}$ des Prozesses.

Zunächst ist es uns überlassen, wie wir die 5 mögliche Pfade durch den Baum nummerieren. Die verschiedenen Filtrationen, die wir durch jeweils andere Nummerierung erhalten können, sind natürlich bis auf Vertauschung der Namen isomorph. Wir zählen daher einfach von oben nach unten durch und notieren (die Zeitachse auslassend) an jedem Knoten, welche Pfade dort vorbeikommen:



Eine Filtration ist eine (bezüglich Mengeninklusion) aufsteigende Folge von Sigma-Algebren, für jeden Zeitpunkt des Prozesses eine, sodass der Prozess zu jeder Zeit eine bezüglich der entsprechenden Algebra messbare Zufallsvariable ist. Für die natürliche Filtration nimmt man zu jedem Zeitpunkt die (bezüglich Mengenschnitt) kleinste solche Sigma-Algebra.

Der Prozess ist zum Zeitpunkt $t = 0$ konstant, also liefert jeder Pfad den selben Wert der Realisierung. Das Urbild desselben ist folglich die Menge Ω aller Ereignisse. Damit es eine Sigma-Algebra wird, müssen wir noch das Komplement $\emptyset$ hinzunehmen und haben mit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ schon die kleinste solche gefunden.

Die ersten drei Pfade führen zur Zeit $t = 1$ auf den oberen Knoten, also ist $\{1, 2, 3\}$ eines der Urbilder, das Element von $\mathcal{F}_1$ sein muss. Selbiges gilt für $\{4, 5\}$ wegen des unteren Knotens. Weil die Filtration eine aufsteigende Mengenfolge sein muss, ergänzen wir noch alle Elemente aus $\mathcal{F}_0$. Ein kurzer Blick genügt um sicherzustellen, dass die Menge $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2, 3\}, \{4, 5\}\}$ bereits alle Komplemente und Vereinigungen enthält.

Zur Zeit $t = 2$ haben wir am oberen Knoten $\{1, 2\}$, in der Mitte $\{3\}$ und unten immer noch $\{4, 5\}$. Vereinigt mit $\mathcal{F}_1$ ergibt sich $\{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$. Es fehlen noch die Komplemente $\{3, 4, 5\}$ und $\{1, 2, 4, 5\}$, mit denen aber auch schon alle Vereinigungen abgedeckt sind. Insgesamt erhalten wir $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{3\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5\}\}$.

Im letzten Schritt bekommen wir die Einzelereignisse $\{1\}$, $\{2\}$ und $\{5\}$ sowie das Doppelereignis $\{3, 4\}$ dazu. Weil $\{3\}$ bereits in $\mathcal{F}_2$ liegt, muss es auch in $\mathcal{F}_3$ liegen. Damit liegt auch das letzte Einzelereignis $\{4\}$ in $\mathcal{F}_3$, denn das ist gerade der Schnitt von $\{3, 4\}$ mit dem Komplement von $\{3\}$. Weil wir alle Einzelereignisse zusammen haben, muss auch jede beliebige Kombination von diesen mit dabei sein und es ergibt sich schlicht $\mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$.

b) Ein anderer Prozess erzeugt die natürliche Filtration $(\mathcal{G}_s)_{s=0,1,2}$ mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\
\mathcal{G}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{4\}\}, \\
\mathcal{G}_2 &= \mathcal{P}(\Omega).
\end{aligned}$$

Offensichtlich können genau 4 verschiedene Ereignisse eintreten, also tut es $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Die Sigma-Algebra des W'raums muss eine Obermenge aller $\mathcal{G}_s$, $s = 0, 1, 2$, sein. Da bleibt nur $\mathcal{G} := \mathcal{P}(\Omega)$. Welches W'maß wir wählen, hängt vom Baum ab, den wir noch konstruieren müssen. Es soll jedenfalls genau jenen Übergängen eine positive (und ansonsten beliebige) Übergangswahrscheinlichkeit einräumen, die im Baum vorgesehen sind. Dazu kann man zu jedem Zeitpunkt t ein Maß $\mathbb{P}_t$ wählen, das die W'masse von 1 positiv auf alle zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Knoten verteilt. Eine zulässige Wahl von $\mathbb{P}$ ist dann das Produktmaß $\mathbb{P} := \bigotimes_t \mathbb{P}_t$.

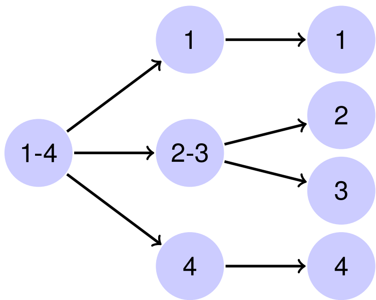
Der Startwert muss deterministisch sein, denn $\mathcal{G}_0$ enthält nur die trivialen Mengen.

Zum Zeitpunkt $s = 1$ gibt es die Einzelmengen $\{1\}$ und $\{4\}$, die wir nicht durch Vereinigung anderer (nichtleerer) Mengen erhalten können. Also entsprechen diese entweder direkt einzelnen Knoten oder sind über die Komplementbildung in $\mathcal{G}_1$ aufgenommen worden. Wäre die Komplementbildung verantwortlich, hätten wir notwendigerweise genau einen Pfad einzeln, o.B.d.A den ersten. Der verbleibende vierte Pfad müsste dann irgendwo zugeschlagen werden. Da weder $\{2, 4\}$ noch $\{3, 4\}$ vorkommen, kann es schon einmal kein Zweierpäckchen sein. Nähmen wir alle 3 Pfade zusammen, würden wir niemals zweielementige Elemente wie $\{2, 3\}$ erhalten, die aber sehr wohl vorkommen. Symmetrische Gegenargumente gelten für den Fall, dass nur der vierte Pfad einzeln vorkommen würde. Also bilden beide Pfade einzelne Knoten aus.

Wir erhalten aus dieser Erkenntnis sofort eine plausible Erklärung für die Elemente $\{2, 3, 4\}$ und $\{1, 2, 3\}$ (die zugehörigen Komplemente) sowie für die Vereinigung $\{1, 4\}$, die erwartungsgemäß alle in $\mathcal{G}_1$ enthalten sind. Bisher nicht erklärt haben wir $\{2, 3\}$.

Dieses könnte schlicht einem Einzelknoten entsprechen, der zwei Pfade vereint. Die in diesem Fall nötigen Komplemente und Vereinigungen sind, wie man flugs nachsieht, tatsächlich alle in $\mathcal{G}_1$ enthalten. Würde man die Pfade trennen und als einzelne Knoten führen, müssten $\{2\}$ und $\{3\}$ vorkommen, was aber nicht der Fall ist. Schlägt man einen der beiden, o.B.d.A den zweiten Pfad, einem der Knoten $\{1\}$ oder $\{4\}$ zu, hätten wir notwendigerweise eine der Mengen $\{1, 2\}$ oder $\{2, 4\}$ dabei, was aber ebenfalls nicht der Fall ist. Als letzte Möglichkeit bliebe, beide Pfade 2 und 3 dem selben Außenknoten zuzuschlagen. Das stünde aber direkt dazu im Widerspruch, dass beide Pfade 1 und 4 einzeln vorkommen müssen, denn in diesem Fall käme nur der Pfad ohne Zuschlag einzeln vor.

Diesem Gedankengang folgend versuchen wir nun eine zulässige Verteilung für den letzten Zeitschritt zu finden. $\mathcal{G}_2$ ist die Potenzmenge, also können wir bedenkenlos alle Pfade aufsplitten und vier Knoten $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ und $\{4\}$ anlegen. Das ergibt insgesamt folgenden Baum:



Beachte, dass es erlaubt ist, Pfade wieder zusammenzuführen. Die Information über die vorher getrennten Pfade trägt sich wegen der Isotonie der Filtration automatisch fort, also laufen wir nicht Gefahr, die bisherige Sigma-Algebra $\mathcal{G}_1$ unzulässigerweise zu verkleinern. Damit wir im letzten Schritt die Potenzmenge erhalten, genügt es (und ist gleichzeitig notwendig), die Aufteilung der Pfade so zu wählen, dass wir durch Schnitt, Vereinigung oder Komplement irgendwie die Einzelmenge $\{2\}$ oder $\{3\}$ erhalten – die jeweils andere ergibt sich dann automatisch aus Schnitt von $\{2, 3\}$ mit dem Komplement der gewählten Einzelmenge. Dazu gibt einige weitere Möglichkeiten (die Sie leicht selbst zeichnen und verifizieren können), zum Beispiel:

- führe jeweils 1 und 2 sowie 3 und 4 zusammen
- führe 1, 2 und 4 zusammen und separiere 3
- führe 1, 3 und 4 zusammen und separiere 2

Die Filtration $(\mathcal{G}_s)_{s=0,1,2}$ impliziert also keineswegs einen eindeutigen Baum. Oder andersherum formuliert: Verschiedene stochastische Prozesse können durchaus die gleiche natürliche Filtration besitzen.