Lösungsblatt 2

Aufgabe 1 (Basispreis-Ungleichung des Europäischen Calls)

Gegeben sei ein arbitragefreier Finanzmarkt mit Zeithorizont $T > 0$. Zeigen Sie durch Arbitrageüberlegungen, dass die Preise zweier endfälliger Europäischer Calls, die sich lediglich im Basispreis unterscheiden, im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen wie die Basispreise, d.h. für zwei Calls mit Basispreisen K_1 und K_2 gilt

$$K_1 \leqslant K_2 \quad \Longrightarrow \quad \pi\left((S_T - K_2)^+\right) \leqslant \pi\left((S_T - K_1)^+\right).$$

Lösungsvorschlag:
Wir haben einen arbitragefreien Finanzmarkt zum Zeithorizont $T > 0$ und zwei endfällige Calls C_1 und C_2, die sich nur in den Basispreisen K_1 und K_2 unterscheiden. Es sei $K_1 \leqslant K_2$.

Um die Behauptung, je höher der Basispreis, desto geringer der Preis, zu zeigen, konstruieren wir ein Portfolio, in dem wir den vermutetermaßen besseren Call kaufen und den schlechteren Call verkaufen. Die folgende Tabelle stellt die Werte der zwei Positionen unseres Portfolios zum Start $t = 0$ (der Kapitaleinsatz und damit ein fairer Preis) und zum Ende $t = T$ (Auszahlung des Portfolios) dar, abhängig vom Marktverlauf:

	$t = 0$	$t = T$		
		$S_T \leqslant K_1$	$K_1 \leqslant S_T \leqslant K_2$	$K_2 \leqslant S_T$
kaufe C_1	$\pi(C_1)$	0	$S_T - K_1$	$S_T - K_1$
verkaufe C_2	$-\pi(C_2)$	0	0	$K_2 - S_T$
Portfoliowert	$\pi(C_1) - \pi(C_2)$	0	$\geqslant 0$	$\geqslant 0$

Angenommen, der Startwert des Portfolios wäre kleiner als 0. Dann könnten wir ein solches kaufen und würden dafür Geld vom Verkäufer bekommen. Dieses Geld legen wir in den Bond. Zum Periodenende ist, wie wir in der Tabelle ablesen können, das Portfolios schlimmstenfalls wertlos, vielleicht sogar etwas wert. Auf jeden Fall haben wir noch das verzinste Kapital im Bond, also in jedem Fall einen positiven Endwert. Das wäre eine Arbitragestrategie (sogar mehr: ein Free Lunch), die es aber nach Voraussetzung nicht geben darf. Wir schließen aus diesem Widerspruch die gegenteilige Annahme:

$$\pi(C_1) - \pi(C_2) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \pi(C_2) \leqslant \pi(C_1).$$

Aufgabe 2 (Ein Markt mit binomialverteilter Aktie)

Betrachten Sie folgenden einperiodigen Finanzmarkt: Es gebe ein zinsfreies Bankkonto mit $B_0 = B_1 = 1$ sowie eine Aktie mit Startpreis $S_0 = 1$. Der Endkurs $S_1 \sim Bin(n; p)$ sei binomialverteilt mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Untersuchen Sie den Markt auf Arbitragefreiheit.

Lösungsvorschlag:
Es gilt $B_0 = B_1 = 1$, $S_0 = 1$ und $S_1 \sim Bin(n; p)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Damit ist insbesondere $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = S_t$ für $t = 0, 1$ und wegen $p \in (0, 1)$ ist $\mathbb{P}(S_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} > 0$ für alle $k \in \{0, \dots, n\}$.

1. Fall: $n = 1$
Die Aktie kostet zum Endzeitpunkt nichts oder höchstens so viel wie der Bond. Das eröffnet eine Arbitragemöglichkeit durch Leerverkauf von Aktien. Da der Totalverlust $S_1 = 0$ mit positiver Wahrscheinlichkeit $1 - p > 0$ eintritt, ist es eine kostenlose, sichere und möglicherweise lukrative Strategie, Aktien leer zu verkaufen und den Verkaufserlös in den Bond zu investieren. Definiere folgende Strategie $\phi = (\phi_t)_{t=0}^0$ für ein $C \in \mathbb{N}$:

$$\phi = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} C\frac{S_0}{B_0} \\ -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -C \end{pmatrix}.$$

Diese Strategie benötigt kein Startkapital, denn

$$V_0 = \beta_0 B_0 + \alpha_0 S_0 = C\frac{S_0}{B_0} B_0 - CS_0 = 0,$$

und erwirtschaftet den Endwert

$$V_T = \beta_0 B_1 + \alpha_0 S_1 = C(S_0 - S_1).$$

Wegen $S_1(\omega) \leqslant 1 = S_0$ für alle $\omega \in \Omega$ ist $\mathbb{P}(V_T \geqslant 0) = 1$ und da $S_1 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ eintritt, gilt $\mathbb{P}(V_T > 0) = 1 - p > 0$. Wir haben also eine Arbitragemöglichkeit gefunden.

2. Fall: $n \geqslant 2$
In diesem Fall gibt es keine Arbitragemöglichkeit. Um dies zu zeigen, verwenden wir Theorem 11:
Es gibt eine Arbitragestrategie genau dann, wenn ein $t \in \{1, \dots, T\}$ und ein $\mathcal{F}_{t-1}$-messbarer Zufallsvektor $\eta : \Omega \to \mathbb{R}^d$ existieren, sodass

$$\mathbb{P}(\eta(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) \geqslant 0) = 1 \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}(\eta(\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1}) > 0) > 0.$$

Da wir einen einperiodigen Markt betrachten, kommt nur $t = T = 1$ in Frage. Der Zufallsvektor η muss $\mathcal{F}_0$-messbar sein, d.h. konstant. Da $S_1(\omega)$ sowohl den Wert 0 als auch den Wert 2 (beachte $n \geqslant 2$) mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen kann, ist die zufällige Differenz $S_1 - S_0$ für manche Ereignisse positiv und für genau ein Ereignis negativ. Die Gleichung $\eta(S_1(\omega) - S_0) \geqslant 0$ ist genau dann für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt, wenn $\eta = 0$. Das wiederum bedeutet in der zweiten Bedingung $0 < \mathbb{P}(\eta(S_1 - S_0) > 0) = \mathbb{P}(0 > 0) = 0$, ein Widerspruch. Also gibt es kein solches η und mit Theorem 11 ist der Markt arbitragefrei.

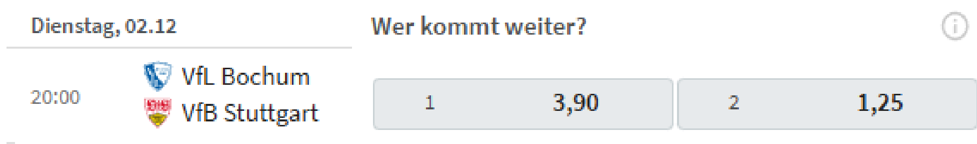
Aufgabe 3 (Ein spezieller Finanzmarkt)

Betrachten Sie den folgenden einperiodigen Finanzmarkt bestehend aus zwei risikobehafteten Anlagen S^1 und S^2 und einem zinslosen Bond B ($r = 0$):

$$(S_0^1,\, S_0^2) = (1, 1) \;\begin{cases} \nearrow\; (3.9,\, 0) = (S_1^1(\omega_1),\, S_1^2(\omega_1)) \\ \searrow\; (0,\, 1.25) = (S_1^1(\omega_2),\, S_1^2(\omega_2)) \end{cases}$$

Ist dieser Markt arbitragefrei? Wenn nein, geben Sie eine zugehörige Arbitragestrategie an.

Hintergrund: Bei diesem Modell handelt es sich nicht um einen Finanzmarkt mit Aktie im klassischen Sinn, sondern um eine einfache Sportwette mit zwei möglichen Ausgängen. Man könnte hier also von einem „Wettmarkt“ sprechen. Konkret handelt es sich um folgende Wette:



Die beiden Ereignisse, die hier eintreten können sind also:

- $\omega_1 =$ „VfL Bochum kommt weiter“
- $\omega_2 =$ „VfB Stuttgart kommt weiter“

Wie in unserem Finanzmarktmodell aus der Vorlesung sind auch hier die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Ereignisse unbekannt!

Lösungsvorschlag:
Gesucht ist eine Handelsstrategie $\varphi = (\alpha^1, \alpha^2, \beta)$ mit den Eigenschaften

$$
\begin{array}{llcll}
\text{i) } t=0: & V_0^\varphi & = & \alpha^1 S_0^1 \;+\; \alpha^2 S_0^2 \;+\; \beta B_0 & = 0, \\
\text{ii) } t=1, \quad \omega=\omega_1: & V_1^\varphi(\omega_1) & = & \alpha^1 S_1^1(\omega_1) + \alpha^2 S_1^2(\omega_1) + \beta B_1 & \geqslant 0, \\
\text{iii) } t=1, \quad \omega=\omega_2: & V_1^\varphi(\omega_2) & = & \alpha^1 S_1^1(\omega_2) + \alpha^2 S_1^2(\omega_2) + \beta B_1 & \geqslant 0,
\end{array}
$$

wobei mindestens eine der beiden Ungleichungen **strikt** gelten muss. Da wir nur eine Periode betrachten und die Handelsstrategie somit nie umgeschichtet wird, ist sie automatisch selbstfinanzierend.

Betrachten wir nun zum Beispiel die Strategie $\varphi = (-1, -4, 5)$. Wir leerverkaufen also zum Zeitpunkt $t = 0$ genau $\alpha^1 = 1$ Einheiten von Wertpapier 1 und $\alpha^2 = 4$ Einheiten von Wertpapier 2. Das Kapital, welches wir durch den Leerverkauf einnehmen, legen wir durch $\beta = 5$ risikolos im Bond an. Setzen wir diese Handelsstrategie oben ein, erhalten wir

$$
\begin{array}{ll}
\text{i)} & V_0^\varphi = -1\cdot 1 - 4\cdot 1 + 5\cdot 1 = 0, \\
\text{ii)} & V_1^\varphi(\omega_1) = -1\cdot 3.9 - 4\cdot 0 + 5\cdot 1 = 1.1 > 0, \\
\text{iii)} & V_1^\varphi(\omega_2) = -1\cdot 0 - 4\cdot 1.25 + 5\cdot 1 = 0.
\end{array}
$$

Damit handelt es sich bei φ tatsächlich um eine Arbitrage-Strategie, und der Markt ist somit insbesondere **nicht** arbitragefrei.

Das Leerverkaufen des Wertpapiers S^i ist hier gleichbedeutend mit dem Anbieten der jeweiligen Wette. Wettet man nicht gerade mit seinem Kumpel beim Feierabendbier, ist das Anbieten von Wetten natürlich nur Sportwettenfirmen vorbehalten. Dass diese ihre Quoten so wählen, dass sie selber möglichst risikolos Gewinn erzielen, ist wenig überraschend. Dennoch kann es durch Quotenunterschiede zwischen den verschiedenen Anbietern auch zu Arbitragemöglichkeiten für den Wettenden kommen, sogenannten „Surebets“. Ein Praxisbeispiel aus der Bundesligasaison 20/21 ist zum Beispiel:

- Anbieter 1: VfB Stuttgart beendet die Saison vor dem SC Freiburg, Quote 1,6
- Anbieter 2: SC Freiburg beendet die Saison vor dem VfB Stuttgart, Quote 3,3

Hier wäre eine einfache mögliche Arbitragestrategie

$$\varphi = (2, 1, -3).$$

Aufgabe 4 (Welche Zahlungsansprüche sind erreichbar?)

Gegeben sei der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} \times \{\omega_1, \omega_2\}$ und $\mathbb{P}(\{(\omega_i, \omega_j)\}) > 0$ für alle $i, j = 1, 2$. Auf diesem Raum betrachten wir einen einperiodigen Finanzmarkt, auf dem es zwei Aktien, S^1 und S^2, sowie einen Bond B gibt. Für den Bond gelte $B_0 = 1$ sowie $B_1 = 1.05$. Für die Aktien gelte $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und außerdem

$$S_1^1(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1.1, & \text{falls } i = 1, \\ 0.9, & \text{falls } i = 2, \end{cases} \qquad \text{sowie} \qquad S_1^2(\omega_i, \omega_j) = \begin{cases} 1.3, & \text{falls } j = 1, \\ 0.8, & \text{falls } j = 2. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie auf diesem Finanzmarkt alle Zahlungsansprüche H, die erreichbar sind.

b) Betrachten Sie den Zahlungsanspruch $H = \max\{C_1, C_2\}$ mit $C_1 = (S^1 - K_1)^+$, $C_2 = (S^2 - K_2)^+$ für $K_1, K_2 > 0$. Beschreiben Sie, wobei es sich bei diesem Zahlungsanspruch handelt und ermitteln Sie, ob er erreichbar ist.

Lösungsvorschlag:

a) Da wir ein einperiodiges Modell betrachten, bezeichne $\varphi = (\beta, \alpha^1, \alpha^2)$ eine Handelsstrategie, charakterisiert durch die Stückzahlen von Bond, Aktie 1 und 2, die wir zur Zeit $t = 0$ kaufen. Ein Zahlungsanspruch H ist hier eine Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum. Wir schreiben kurz $H(i, j) := H(\omega_i, \omega_j)$. Ist er erreichbar, so existiert eine (selbstfinanzierende) Handelsstrategie φ, so dass für das zugehörige Vermögen $V_T^\varphi = H$ gilt. Im vorliegenden Fall $T = 1$ müssen folgende vier Gleichungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \beta 1.05 + \alpha^1 1.1 + \alpha^2 1.3 &= H(1,1) \\ \beta 1.05 + \alpha^1 0.9 + \alpha^2 1.3 &= H(2,1) \\ \beta 1.05 + \alpha^1 1.1 + \alpha^2 0.8 &= H(1,2) \\ \beta 1.05 + \alpha^1 0.9 + \alpha^2 0.8 &= H(2,2). \end{aligned}$$

In Matrix-Vektor-Schreibweise lässt sich dies auch als

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1.05 & 1.1 & 1.3 \\ 1.05 & 0.9 & 1.3 \\ 1.05 & 1.1 & 0.8 \\ 1.05 & 0.9 & 0.8 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} H(1,1) \\ H(2,1) \\ H(1,2) \\ H(2,2) \end{pmatrix}}_{=:b}$$

notieren. Da die Spalten von A linear unabhängig sind, ist der Rang von A gleich 3. Damit ist dieses LGS genau dann lösbar, falls der Rang der Matrix $\tilde{A}$, die aus A entsteht, indem man b als vierte Spalte hinzufügt, ebenfalls 3 beträgt. Da $3 = rk(A) \leqslant rk(\tilde{A}) \leqslant 4$, ist dies genau dann der Fall wenn $det(\tilde{A}) = 0$. Wir berechnen diese Determinante:

$$\begin{aligned} \det(\tilde{A}) &= \begin{vmatrix} 1.05 & 1.1 & 1.3 & H(1,1) \\ 1.05 & 0.9 & 1.3 & H(2,1) \\ 1.05 & 1.1 & 0.8 & H(1,2) \\ 1.05 & 0.9 & 0.8 & H(2,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.05 & 1.1 & 1.3 & H(1,1) \\ 0 & -0.2 & 0 & H(2,1) - H(1,1) \\ 0 & 0 & -0.5 & H(1,2) - H(1,1) \\ 0 & -0.2 & -0.5 & H(2,2) - H(1,1) \end{vmatrix} \\ &= 1.05 \cdot \begin{vmatrix} -0.2 & 0 & H(2,1) - H(1,1) \\ 0 & -0.5 & H(1,2) - H(1,1) \\ -0.2 & -0.5 & H(2,2) - H(1,1) \end{vmatrix} \\ &= 1.05 \cdot \Big((-0.2) \cdot (-0.5) \cdot \big(H(2,2) - H(1,1)\big) - (-0.2) \cdot (-0.5) \cdot \big(H(1,2) - H(1,1)\big) \\ &\qquad - (-0.5) \cdot \big(H(2,1) - H(1,1)\big) \cdot (-0.2) \Big) \\ &= 1.05 \cdot (-0.2) \cdot (-0.5) \cdot \big(H(2,2) - H(2,1) - H(1,2) + H(1,1)\big). \end{aligned}$$

Somit ist die Menge der erreichbaren Zahlungsansprüche gegeben durch

$$\{H : \Omega \to \mathbb{R} \mid H(1,1) + H(2,2) = H(2,1) + H(1,2)\}.$$

b) Zunächst einmal stellen wir fest, dass H sich aus zwei europäischen Calls ableitet, einen auf Aktie 1 mit Strike K_1 sowie einen auf Aktie 2 mit Strike K_2. H zahlt nun in jedem denkbaren Szenario das

Maximum dieser beiden Calls aus, entspricht also für jedes $\omega \in \Omega$ dem besseren der beiden Calls. Nun zur Erreichbarkeit:
Sei zunächst $(1.1 - K_1)^+ \geqslant (1.3 - K_2)^+$. Nach Teil a) ist $\max\{C_1, C_2\}$ genau dann erreichbar, wenn

$$\begin{aligned}&\max\{(1.1 - K_1)^+, (1.3 - K_2)^+\} + \max\{(0.9 - K_1)^+, (0.8 - K_2)^+\}\\ =&\max\{(1.1 - K_1)^+, (0.8 - K_2)^+\} + \max\{(0.9 - K_1)^+, (1.3 - K_2)^+\}\end{aligned}$$

gilt. Wegen $(0.8 - K_2)^+ \leqslant (1.3 - K_2)^+ \leqslant (1.1 - K_1)^+$ stimmen die ersten beiden Maxima links und rechts überein und die Bedingung vereinfacht sich zu

$$\max\{(0.9 - K_1)^+, (0.8 - K_2)^+\} = \max\{(0.9 - K_1)^+, (1.3 - K_2)^+\},$$

was genau dann gilt, wenn $(0.9 - K_1)^+ \geqslant (1.3 - K_2)^+$ ist. Aufgrund der Annahme ist diese Bedingung äquivalent zu $\max\{C_1, C_2\} = C_1$. Umgekehrt kann man im Fall $(1.1 - K_1)^+ < (1.3 - K_2)^+$ zeigen, dass H nun genau dann erreichbar ist, wenn $\max\{C_1, C_2\} = C_2$ gilt.
Alles in allem haben wir also gezeigt:

$$H \text{ ist erreichbar} \Longleftrightarrow \max\{C_1, C_2\} = C_i \text{ für } i = 1, 2.$$

Mit anderen Worten: H ist genau dann erreichbar, wenn er entweder C_1 oder C_2 entspricht, d. h. ein ganz normaler Call ist. Sobald der Aspekt des Wechsels zwischen der Auszahlung der beiden Calls tatsächlich zum tragen kommt, ist H nicht mehr erreichbar. Dies ist z. B. dann der Fall, wenn $0.9 < K_1 < 1.1$ und $0.8 < K_2 < 1.3$ gilt.