Lösungsblatt 3

Aufgabe 1 (Parameterabhängige Optionen im CRR-Modell)

Gegeben sei ein zweiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein Modell mit $S_0 = B_0 = 1$ sowie $u = 3$ und $d = \frac{1}{3}$.

a) Für welche Zinssätze $r \in [0, \infty)$ ist der Markt arbitragefrei?

b) Sei nun $r = \frac{2}{3}$. Betrachten Sie in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ eine Option mit Ausübungszeitpunkt $T = 2$ und folgendem Auszahlungsprofil:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 - x, & \omega = (u, u), \\ x, & \omega = (u, d), \\ x, & \omega = (d, u), \\ x - \frac{1}{2}, & \omega = (d, d). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, sodass H stets eine nicht-negative Auszahlung leistet und gleichzeitig zur Zeit $t = 0$ nicht mehr als $\frac{33}{200}$ kostet.

Lösungsvorschlag:
Es liegt ein zweiperiodiges CRR-Modell ($T = 2$) mit $S_0 = B_0 = 1$, $u = 3$ und $d = \frac{1}{3}$ vor.

a) Nach Theorem 3.3 ist der Finanzmarkt genau dann arbitragefrei (NA), wenn $d < 1 + r < u$ gilt. In unserem Fall muss also $-\frac{2}{3} < r < 2$ gelten. Da $r \geqslant 0$ nach Voraussetzung, erhalten wir die Forderung $r \in [0, 2)$.

b) Sei nun $r = \frac{2}{3}$. Nach Teil a) ist der Markt damit arbitragefrei und nach Theorem 3.4 sogar vollständig. Zunächst können wir sofort feststellen, dass

$$H(\omega) \geqslant 0 \quad \forall \omega \in \Omega \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Als nächstes werden wir den fairen Preis der Option bestimmen. Dazu definieren wir

$$q := \frac{(1 + r) - d}{u - d} = \frac{1}{2}.$$

Da der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist, existiert nach Vorlesung ein (eindeutiges) äquivalentes Martingalmaß $\mathbb{Q}$, mit welchem Preise von Optionen mittels der risikoneutralen Bewertungsformel (vgl. Theorem 3.4) bestimmt werden können. Konkret ist $\mathbb{Q}$ gegeben durch

$$\mathbb{Q}\big(\{\omega\}\big) := \mathbb{Q}\big(\{y_1, y_2\}\big) := q_{y_1} \cdot q_{y_2}, \quad y_1, y_2 \in \{u, d\},$$

wobei

$$q_{y_i} = \begin{cases} q, & y_i = u, \\ 1 - q, & y_i = d, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

Damit kann der Preis $\pi(H)$ von H zur Zeit $t = 0$ über die risikoneutrale Bewertungsformel

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \sum_{\omega = (y_1, y_2) \in \Omega} q_{y_1} q_{y_2} \cdot \frac{H(\omega)}{(1 + r)^2}$$

bestimmt werden. Da $q_{y_i} = \frac{1}{2}$ für alle $i = 1, 2$ und alle y_i, erhalten wir

$$\begin{aligned}\pi(H) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+r)^2} \left(1 - x + x + x + x - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{25} \left(2x + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{18}{100} x + \frac{9}{200}.\end{aligned}$$

Es gilt somit genau dann $\pi(H) \leqslant \frac{33}{200}$, wenn $\frac{18}{100} x \leqslant \frac{24}{200}$, also $x \leqslant \frac{2}{3}$ erfüllt ist. Zusammen mit der Forderung nach der Nicht-Negativität des Zahlungsanspruches H erhält man

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right].$$

Aufgabe 2 (Was kostet der Put im mehrperiodigen CRR-Modell?)

Betrachten Sie das dreistufige Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit einer Aktie und einem Bond. Es gelte $u = \frac{8}{5}$, $d = \frac{3}{5}$ und pro Periode werde mit $r = 10\%$ verzinst. Die Aktie koste initial $S_0 = 20$ Geldeinheiten, der Bond starte mit einer Geldeinheit. Berechnen Sie den fairen Preis einer europäischen Put-Option mit Basispreis $K = 20$ und Laufzeit $T = 3$, sowie die Anfangsinvestitionen α_0 und β_0 der zugehörigen Hedging-Strategie.

Lösungsvorschlag:

Die Auszahlung eines europäischen Calls mit Basispreis $K = 20$ und Laufzeit $T = 3$ ist

$$H = (20 - S_3)^+.$$

Diese Auszahlung ist nicht pfadabhängig, sondern hängt nur vom Aktienkurs in $T = 3$ (am Ende der Laufzeit) ab, kann also verstanden werden als Funktion dieses Aktienkurses

$$H = h(S_T),$$

wobei $h(x) := (20 - x)^+$.

Nach Korollar 3.5 ist der Preis $\pi(H)$ zur Zeit $t = 0$ eines europäischen Zahlungsanspruches H mit Laufzeit T und Form $H = h(S_T)$ gegeben durch

$$\pi(H) = \frac{1}{B_T} \sum_{k=0}^{T} \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k}\, h(S_0 u^k d^{T-k}),$$

wobei $q := \frac{1+r-d}{u-d}$.

In unserem Fall ergibt sich also mit $T = 3$, $h(S_0 u^k d^{T-k}) = \left(20 - 20 u^k d^{T-k}\right)^+$ und $q = \frac{1+\frac{1}{10}-\frac{3}{5}}{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}$:

$$\pi(H) = \frac{1}{(1+\frac{1}{10})^3} \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^3 20(1 - u^k d^{3-k})^+.$$

Wir berechnen alle 4 Summanden der Summe separat, stellen aber fest, dass für $k = 2$ und $k = 3$ der Summand verschwindet, denn in diesen beiden Fällen ist $(1 - u^k d^{3-k})^+ = 0$.

Für $k = 0$ erhalten wir:

$$\binom{3}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^3 20(1 - u^0 d^{3-0})^+ = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 20 \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) = \frac{98}{50} = 1,96.$$

Für $k = 1$ erhalten wir:

$$\binom{3}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^3 20(1 - u^1 d^{3-1})^+ = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 20 \left(1 - \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = \frac{159}{50} = 3,18.$$

Wir erhalten also in Summe als fairen Preis für die Put-Option mit Laufzeit $T = 3$ und Basispreis $K = 20$:

$$\pi(H) = \frac{1}{(1+\frac{1}{10})^3} \cdot (1,96 + 3,18) = \frac{1}{1,331} \cdot 5,14 \approx 3,86.$$

Die zugehörige Hedging-Strategie φ liefert somit $V_0^\varphi = \pi(H) \approx 3,86$. Um die Anfangsinvestition (α_0, β_0) von φ zu besimmen, benötigen wir die Preise $V_1^\varphi(u)$ und $V_1^\varphi(d)$ der Put-Option zur Zeit $t = 1$. Entsprechend Bemerkung 3.2 im Buch gilt für den Preis V_1^φ (beachte $q = 1 - q = \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}
V_1^\varphi &= B_1 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\middle|\mathcal{F}_1\right] \\
&= \frac{B_1}{B_T} \sum_{k=0}^{T-1} \binom{T-1}{k} q^k (1-q)^{(T-1)-k} h(S_1 u^k d^{(T-1)-k}) \\
&= \frac{q^{T-1}}{(1+\frac{1}{10})^{T-1}} \sum_{k=0}^{T-1} \binom{T-1}{k} h(S_1 u^k d^{(T-1)-k}) \\
&= \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{10}}\right)^2 \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} h(S_1 u^k d^{2-k}).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir den Preis $V_1^\varphi(u)$

$$\begin{aligned}
V_1^\varphi(u) &= B_1 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\middle|S_1 = uS_0\right] \\
&= \frac{1}{2,2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} h(S_0 u^{k+1} d^{2-k}) \\
&= \frac{1}{2,2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \left(20 - 20u^{k+1} d^{2-k}\right)^+ \\
&= \frac{20}{2,2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \left(1 - u^{k+1} d^{2-k}\right)^+ \\
&= \frac{20}{2,2^2} \left(\binom{2}{0} \left(1 - \frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \binom{2}{1} \cdot 0 + \binom{2}{2} \cdot 0\right) \\
&= \frac{20}{2,2^2} \cdot \left(1 - \frac{72}{125}\right) \\
&\approx 1,75
\end{aligned}$$

und analog für $V_1^\varphi(d)$

$$\begin{aligned}
V_1^\varphi(d) &= B_1 \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_T}\middle|S_1 = dS_0\right] \\
&= \frac{1}{2,2^2} \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} h(S_0 u^k d^{3-k}) \\
&= \frac{20}{2,2^2} \left(\binom{2}{0} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^3\right) + \binom{2}{1} \left(1 - \frac{8}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2\right) + \binom{2}{2} \cdot 0\right) \\
&\approx 6,74.
\end{aligned}$$

Wir können schnell überprüfen, ob die Rechnung gestimmt hat: Interpretiert man V_1^φ als Zahlungsanspruch einer Option mit Laufzeit $T = 1$, erhalten wir als fairen Preis im einstufigen CRR-Modell

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{V_1^\varphi}{B_1}\right] \approx \frac{1}{1,1}\left(\frac{1}{2} \cdot 1,75 + \frac{1}{2} \cdot 6,74\right) \approx 3.86,$$

was mit dem vorher berechneten Preis der Put-Option mit Laufzeit $T = 3$ übereinstimmt.

Zur Anfangsinvestition der Hedging-Strategie: Es muss gelten:

$$\alpha_0 u S_0 + \beta_0 B_1 = V_1^{\varphi}(u),$$
$$\alpha_0 d S_0 + \beta_0 B_1 = V_1^{\varphi}(d),$$

also

$$32\alpha_0 + 1,1\beta_0 \approx 1,75,$$
$$12\alpha_0 + 1,1\beta_0 \approx 6,74.$$

Wir erhalten als Lösung $\alpha_0 \approx -0,25$ und $\beta_0 \approx 8,85$.

Aufgabe 3 (Backward Engineering)

Es liege ein arbitragefreier T-periodiger CRR-Finanzmarkt mit $B_t \equiv 1$ für alle t und $S_0 = 1$ vor und für alle $K > 0$ seien die fairen Preise $\pi(K)$ europäischer Call-Optionen mit Basispreis K zur Zeit $t = 0$ bekannt. Zeigen Sie, dass man daraus die Parameter u und d des CRR-Modells bestimmen kann.

Lösungsvorschlag:
Zum Zeitpunkt T gilt aufgrund der Struktur des CRR-Modells:

$$S_T \in \{S_0 u^T, S_0 u^{T-1} d, ..., S_0 d^T\},$$

wobei aufgrund der (NA)-Bedingung $u > d$ und somit

$$S_0 u^T > S_0 u^{T-1} d > ... > S_0 d^T \tag{1}$$

gelten muss. Da $B_T = 1$ gilt nach Korollar 3.5 für einen europäischen Call $H = (S_T - K)^+$

$$\pi(K) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T - K)^+\right] = \sum_{m=0}^{T} \begin{pmatrix} T \\ m \end{pmatrix} \left(S_0 u^m d^{T-m} - K\right)^+ q^m (1-q)^{T-m}.$$

Um u zu bestimmen, wählen wir das kleinste K, bei dem die monoton fallende Preisfunktion $K \mapsto \pi(K)$ (vgl. Aufgabe 1 des 2. Übungsblatts) gerade den Wert 0 annimmt:

$$K_0 := \inf\{K > 0 : \ \pi(K) = 0\}$$

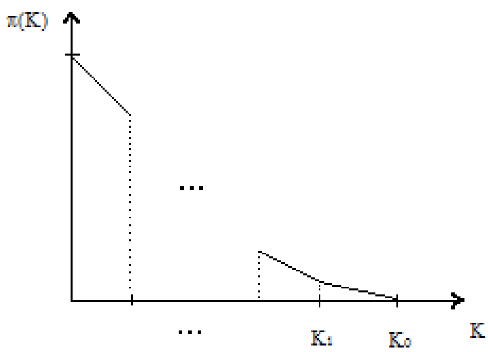
K_0 ist also der kleinste Basispreis für den die nicht-negativen Summanden der Preisformel alle 0 sind. Wegen (1) und $S_0 = 1$ folgt

$$K_0 = S_0 \cdot u^T = u^T$$

und somit

$$u = \sqrt[T]{K_0}.$$

Den Parameter d kann man durch ein ähnliches Vorgehen bestimmen, indem man die Ableitung der Preisfunktion $K \mapsto \pi(K)$ nach dem Basispreis K betrachtet. Die Preisfunktion ist abschnittsweise linear:



Auf diesen Abschnitten ist die Ableitung der Preisfunktion konstant und es gibt Preise $K_0, K_1, ...$, die diese Intervalle begrenzen. Hierbei ist K_0 der oben bestimmte kleinste Preis für den $\pi(K) = 0$ gilt. Wir wählen

$$K_1 := \inf\{K > 0 : \ \pi'_+(K) = \pi'_-(K_0)\},$$

wobei π'_+, π'_- die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung der Preisfunktion bezeichne. Es folgt mit (1) und $S_0 = 1$

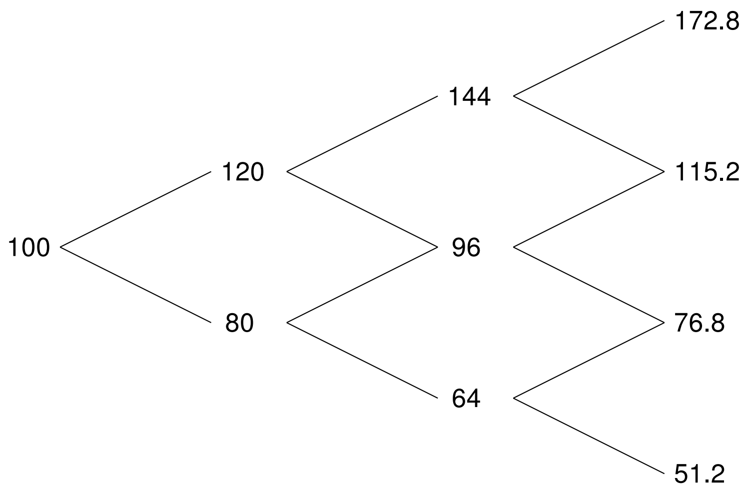
$$K_1 = S_0 u^{T-1} d = u^{T-1} d$$

und schließlich

$$d = \frac{K_1}{(\sqrt[T]{K_0})^{T-1}}.$$

Aufgabe 4 (Eurasische Option)

Gegeben sei ein dreiperiodiger Finanzmarkt mit normiertem risikolosem Wertpapier (d.h. $B_0 = 1$) mit Zinssatz r und einer Aktie S. Es sei $\Omega = \{u, d\}^3$ und die mögliche Kursentwicklung der Aktie sei wie folgt:



a) Für welche $r \in [0, \infty)$ ist obiger Finanzmarkt arbitragefrei? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Sei nun $r = 0.1$.
Betrachten Sie folgende „Eurasische" Option H, bei der der Basispreis dem arithmetischen Mittel des Aktienkurses zu den letzten beiden Zeitpunkten entspricht. Zum Fälligkeitszeitpunkt $T = 3$ besitzt die Option also die Auszahlung

$$H = (S_3 - K)^+,$$

wobei $K = \frac{1}{2}(S_2 + S_3)$.
Bestimmen Sie den fairen Preis der Option zur Zeit $t = 0$.

c) Bestimmen Sie die Anfangsinvestitionen α_0 und β_0 der zu H gehörenden Hedging-Strategie.

Lösungsvorschlag:

a) Beim Finanzmarkt handelt es sich um ein CRR-Modell mit Parametern $u = 1.2$ und $d = 0.8$. Damit (NA) vorliegt, muss nach Theorem 3.3 gelten

$$\begin{aligned} & d < 1 + r < u \\ \iff \quad & 0.8 < 1 + r < 1.2 \\ \iff & -0.2 < \quad r \quad < 0.2. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also $r \in [0, \frac{1}{5})$.

b) Wir verwenden die risikoneutrale Bewertungsformel. Zunächst ist das eindeutige äquivalente Martingalmaß bestimmt durch

$$q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{3}{4}.$$

Die Auszahlungen der Option in den verschiedenen Marktzuständen zum Endzeitpunkt sind

$$\begin{array}{llll} H(uuu) = 14.4 & H(uud) = 0 & H(udu) = 9.6 & H(udd) = 0 \\ H(duu) = \ \ 9.6 & H(dud) = 0 & H(ddu) = 6.4 & H(ddd) = 0. \end{array}$$

Damit kann nun mit der risikoneutralen Bewertungsformel der faire Preis der Option berechnet werden:

$$\pi(H) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_3}\right] = \frac{1}{1.1^3}\left(14.4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 2 \cdot 9.6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + 6.4 \cdot \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = \frac{75}{11}.$$

c) Wir berechnen zunächst mithilfe der risikoneutralen Bewertungsformel die fairen Preise der Option zum Zeitpunkt $t = 1$.

$$\pi_1(H)(u) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1\right](u) = \frac{1}{1.1^2}\left(14.4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 9.6 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{90}{11},$$

$$\pi_1(H)(d) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2} \mid \mathcal{F}_1\right](d) = \frac{1}{1.1^2}\left(9.6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 6.4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{60}{11}.$$

Für die Hedging-Strategie muss zum Zeitpunkt $t = 0$ nun folgendes LGS erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(u) \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(d) \end{aligned}$$

$\iff$

$$\begin{aligned} 120\alpha_0 + 1.1\beta_0 &= \frac{90}{11} \\ 80\alpha_0 + 1.1\beta_0 &= \frac{60}{11} \end{aligned}$$

$\iff$ $\quad (\alpha_0, \beta_0) = (\frac{3}{44}, 0).$