

Lösungsblatt 4

Aufgabe 1 (Grenzübergang zum Black-Scholes-Modell)

Am Ende des Beweises von Theorem 6 in Kapitel 3 (Grenzübergang zum Black-Scholes Modell) wird mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg-Feller gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{B}_{n, \hat{q}_n}(a_n) = \Phi(d),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet. Zeigen Sie, dass man diesen Grenzwertsatz hier anwenden darf.

Hinweis: Zeigen Sie, dass für \hat{q}_n wie in der Vorlesung definiert und $Z_n \sim \text{Bin}(n, \hat{q}_n)$ die Lindeberg-Bedingung erfüllt ist, welche für die Folgerung der Konvergenz in Verteilung

$$\tilde{Z}_n := \frac{Z_n - \mathbb{E}[Z_n]}{\sqrt{\text{Var}(Z_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

benötigt wird. Hierbei bezeichne \mathcal{N} die Normalverteilung.

Lösungsvorschlag:

Wir wiederholen zunächst den Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller (Theorem 3.7):

Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien X_{n1}, \dots, X_{nr_n} unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_{nk} =: \mu_{nk}$ und $\text{Var}(X_{nk}) =: \sigma_{nk}^2 < \infty$. Wir setzen $\sigma_n^2 := \sigma_{n1}^2 + \dots + \sigma_{nr_n}^2$. Wenn die Lindeberg-Bedingung

$$L_n(\epsilon) := \frac{1}{\sigma_n^2} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbb{E} \left[(X_{nk} - \mu_{nk})^2 \mathbb{1}_{|X_{nk} - \mu_{nk}| > \epsilon \sigma_n} \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall \epsilon > 0$$

erfüllt, dann gilt für $S_n := X_{n1} + \dots + X_{nr_n}$

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}(S_n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Die Zufallsvariablen \tilde{Z}_n aus dem Hinweis erfüllen $\mathbb{E}[\tilde{Z}_n] = 0$ und $\text{Var}(\tilde{Z}_n) = 1$. Es gilt also

$$\tilde{Z}_n = \frac{\tilde{Z}_n - \mathbb{E}[\tilde{Z}_n]}{\sqrt{\text{Var}(\tilde{Z}_n)}}.$$

Wir wollen den Satz von Lindeberg-Feller nun so anwenden, dass \tilde{Z}_n die Rolle von S_n aus o.g. Theorem einnimmt, d.h. wir suchen eine Darstellung der Form

$$\tilde{Z}_n = \sum_{k=1}^{r_n} X_{nk}.$$

Es gilt $Z_n \sim \text{Bin}(n, \hat{q}_n)$, also kann man Z_n in die Summe von n unabhängigen und identisch Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen $I_{nk} \sim \text{Bin}(1, \hat{q}_n)$ zerlegen, $Z_n = \sum_{k=1}^n I_{nk}$. Wegen $\mathbb{E}[Z_n] = n\mathbb{E}[I_{n1}] = n\hat{q}_n$ und $\text{Var}(Z_n) = n\text{Var}(I_{n1}) = n\hat{q}_n(1 - \hat{q}_n)$, gilt also $\tilde{Z}_n = \sum_{k=1}^n X_{nk}$ mit $X_{nk} := \frac{I_{nk} - \hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1 - \hat{q}_n)}}$ und wir haben die gesuchte Darstellung.

Bezeichne mit $\mu_{nk} := \mathbb{E}[X_{nk}] = 0$, $\sigma_{nk}^2 := \text{Var}(X_{nk}) = \frac{1}{n}$ Erwartungswert und Varianz der Dreieckssummanden sowie mit $\sigma_n^2 := \text{Var}(\sum_{k=1}^n X_{nk}) = 1$ die Varianz der Zeilensumme. Die Lindeberg-Bedingung lautet somit

$$L_n(\epsilon) := \frac{1}{1} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[(X_{nk} - 0)^2 \mathbb{1}_{|X_{nk} - 0| > \epsilon \cdot 1} \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall \epsilon > 0$$

bzw.

$$L_n(\epsilon) := \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[X_{nk}^2 \mathbb{1}_{|X_{nk}| > \epsilon} \right] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \forall \epsilon > 0.$$

Nun kann in unserem Fall jedes X_{nk} nur zwei verschiedene Werte annehmen, nämlich $\frac{-\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$ und $\frac{1-\hat{q}_n}{\sqrt{n\hat{q}_n(1-\hat{q}_n)}}$, abhängig von der Realisierung von I_{nk} .

In der Vorlesung wurde \hat{q}_n definiert als $\hat{q}_n := \frac{q_n u_n}{1+I_n} = \frac{\exp(\sigma\sqrt{\Delta_n})}{\exp(r\Delta_n)} q_n$. Wegen $\Delta_n := \frac{T}{n} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) und $q_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$) (vgl. Beweis von Theorem 6) folgt also $\hat{q}_n \rightarrow \frac{1}{2}$ ($n \rightarrow \infty$). Dies wiederum bedeutet $|X_{nk}| \rightarrow 0$ \mathbb{P} -f.s. ($n \rightarrow \infty$) und insbesondere existiert für beliebige $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, sodass $|X_{nk}(\omega)| \leq \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ und alle $\omega \in \Omega$.

Sei also $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$L_n(\epsilon) = \sum_{k=1}^n \int_{|X_{nk}| > \epsilon} X_{nk}^2 d\mathbb{P} = 0.$$

Die Behauptung folgt dann direkt aus dem Satz von Lindeberg-Feller.

Aufgabe 2 (Polyas Urne)

Eine Urne enthalte initial eine schwarze und eine weiße Kugel. Nach jedem Zug notiere man die Farbe der gezogenen Kugel und lege $c \in \mathbb{N}$ Kugeln der selben Farbe zurück in die Urne. Sei S_n , $n \in \mathbb{N}_0$, die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne nach dem n -ten Zug und $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die zugehörige natürliche Filtration. Zeigen Sie, dass der Anteil schwarzer Kugeln in der Urne ein \mathcal{F} -Martingal ist.

Lösungsvorschlag:

Betrachte eine Urne mit zunächst genau einer weißen und genau einer schwarzen Kugel. Nach jedem Zug erhöht sich die Gesamtzahl Kugeln in der Urne um $(c-1)$, nach dem n -ten Zug befinden sich also $2 + n(c-1)$ Kugeln darin. Bezeichne mit S_n die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne und mit $X_n = \frac{S_n}{2+n(c-1)}$ den Anteil schwarzer Kugeln, jeweils nach dem n -ten Zug. $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei die natürliche Filtration von S .

Wir wollen zeigen, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathcal{F} -Martingal ist. Wegen $|X_n| = X_n \in (0, 1)$ für alle n ist X_n integrierbar. Es genügt, die Martingaleigenschaft für einen Zeitschritt $(n+1 \rightarrow n)$ zu zeigen. Es bezeichne A_n das Ereignis, dass im n -ten Zug eine schwarze Kugel gezogen wird. Dann gilt $\mathbb{1}_{A_{n+1}} | S_n \sim \text{Bin}(1, \frac{S_n}{2+n(c-1)})$ und folglich

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = \frac{S_n}{2+n(c-1)}.$$

Schließlich ergibt sich mit messbarem Ausklammern

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E} \left[\frac{S_{n+1}}{2+(n+1)(c-1)} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{(S_n + c - 1)\mathbb{1}_{A_{n+1}} + S_n \mathbb{1}_{A_{n+1}^c}}{2+(n+1)(c-1)} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= \frac{(S_n + c - 1)}{2+(n+1)(c-1)} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}} | \mathcal{F}_n] + \frac{S_n}{2+(n+1)(c-1)} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_{n+1}^c} | \mathcal{F}_n] \\ &= \frac{S_n + (c-1)}{2+(n+1)(c-1)} \frac{S_n}{2+n(c-1)} + \frac{S_n}{2+(n+1)(c-1)} \frac{2+n(c-1) - S_n}{2+n(c-1)} \\ &= \frac{1}{(2+(n+1)(c-1))(2+n(c-1))} \left(S_n^2 + (c-1)S_n + (2+n(c-1))S_n - S_n^2 \right) \\ &= \frac{S_n}{2+n(c-1)} \\ &= X_n. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Doob-Zerlegung)

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie den Doob'schen Zerlegungssatz in diskreter Zeit:
Jedes Supermartingal $X := (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ bezüglich einer Filtration $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ in \mathfrak{F} lässt sich \mathbb{P} -f.s. eindeutig darstellen als $X_t = M_t + A_t$, $t \in \mathbb{N}_0$, wobei $M := (M_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathcal{F} -Martingal und $A := (A_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathbb{P} -f.s. fallender, \mathcal{F} -vorhersagbarer Prozess mit Startwert $A_0 = 0$ ist.

Hinweis: A \mathbb{P} -f.s. fallend $\Leftrightarrow A_t \leq A_{t-1}$ \mathbb{P} -f.s. $\forall t \in \mathbb{N}$, A \mathcal{F} -vorhersagbar $\Leftrightarrow A_t$ \mathcal{F}_{t-1} -messbar $\forall t \in \mathbb{N}$. Konstruieren Sie das passende Martingal M , indem Sie von der Folge der Partialsummen stets den unerwünschten Anteil abziehen:

$$M_t := X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} (X_{i+1} - \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i]), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Lösungsvorschlag:

Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine Filtration in \mathfrak{F} und $X := (X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathcal{F} -Supermartingal. Dem Hinweis folgend setzen wir

$$M_t := X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} (X_{i+1} - \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i]), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Wir überprüfen, ob der so definierte Prozess $(M_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ein \mathcal{F} -Martingal ist:

- M_t ist \mathcal{F}_t messbar, denn laut Definition ist M_t eine Summe aus den Zufallsvariablen X_0, \dots, X_t (welche alle \mathcal{F}_t -messbar sind) sowie von bedingten Erwartungswerten gegeben $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{t-1}$ (welche ebenfalls \mathcal{F}_t -messbar sind).
- Der Erwartungswert von M_t existiert, da der Erwartungswert für jeden der Summanden von M_t existiert.
- Die Martingaleigenschaft rechnen wir nach:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}\left[X_0 + \sum_{i=0}^t (X_{i+1} - \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i]) \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= X_0 + \sum_{i=0}^t \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_t] - \sum_{i=0}^t \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] | \mathcal{F}_t] \\ &= X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} X_{i+1} + \mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] - \sum_{i=0}^t \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] \\ &= X_0 + \sum_{i=0}^{t-1} X_{i+1} - \sum_{i=0}^{t-1} \mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] \\ &= M_t, \quad t \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Aufgrund der angewandten Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte gelten o.g. Gleichungen nur \mathbb{P} -f.s. Damit die geforderte Zerlegung $X_t = M_t + A_t$ gilt, definieren wir A_t einfach passend

$$A_t := X_t - M_t = X_t + \sum_{i=0}^{t-1} (\mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] - X_{i+1}) - X_0 = \sum_{i=0}^{t-1} (\mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] - X_{i+1}).$$

Wir überprüfen die geforderten Eigenschaften für den so definierten Prozess $(A_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$:

- $A_0 = 0$ folgt sofort (leere Summe).
- Nach Konstruktion ist jedes A_t bereits \mathcal{F}_{t-1} messbar, also $A = (A_t)$ ist \mathcal{F} -vorhersagbar (in Definition von A_t tauchen nur X_0, \dots, X_{t-1} sowie bedingte Erwartungswerte gegeben $\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_{t-1}$ auf).
- Dass A fast sicher fällt, liegt an der Supermartingaleigenschaft von X , es gilt nämlich wegen $\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq X_t \forall t \in \mathbb{N}_0$:

$$A_{t+1} = \sum_{i=0}^t (\mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] - X_i) = \underbrace{\sum_{i=0}^{t-1} (\mathbb{E}[X_{i+1} | \mathcal{F}_i] - X_i)}_{=A_t} + \underbrace{(\mathbb{E}[X_{t+1} | \mathcal{F}_t] - X_t)}_{\leq 0} \leq A_t.$$

Zu zeigen bleibt noch die behauptete \mathbb{P} -f.s. Eindeutigkeit. Angenommen, es gibt Varianten M^* und A^* von M bzw. A mit obigen Eigenschaften, sodass

$$M_t^* + A_t^* = X_t = M_t + A_t \quad \forall t \in \mathbb{N}_0. \quad (1)$$

Aus $A_0^* = 0 = A_0$, der \mathcal{F} -Vorhersagbarkeit von A und A^* sowie der Martingaleigenschaft von M und M^* folgt dann

$$\begin{aligned} A_{t+1}^* - A_t^* &= \mathbb{E}[A_{t+1}^* - A_t^* | \mathcal{F}_t] + 0 \\ &= \mathbb{E}[A_{t+1}^* - A_t^* | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[M_{t+1}^* | \mathcal{F}_t] - M_t^* \\ &= \mathbb{E}[(A_{t+1}^* + M_{t+1}^*) - (A_t^* + M_t^*) | \mathcal{F}_t] \\ &\stackrel{(1)}{=} \mathbb{E}[X_{t+1} - X_t | \mathcal{F}_t] \\ &\stackrel{(1)}{=} \mathbb{E}[(A_{t+1} + M_{t+1}) - (A_t + M_t) | \mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[A_{t+1} - A_t | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[M_{t+1} | \mathcal{F}_t] - M_t \\ &= A_{t+1} - A_t \end{aligned}$$

was induktiv $A_t^* = A_t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ impliziert. Diese \mathbb{P} -f.s. Gleichheit zusammen mit (1) impliziert aber auch $M_t^* = M_t$ \mathbb{P} -f.s. für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4 (Eigenschaften der Menge aller Martingalmaße)

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ ein endlicher filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

- \mathcal{M} und \mathcal{M}^* sind konvexe Mengen.
- Es gilt $\overline{\mathcal{M}^*} = \mathcal{M}$, wobei mit $\overline{\mathcal{M}^*}$ der Abschluss der Menge \mathcal{M}^* bezeichnet wird.

Lösungsvorschlag:

Vorab: Es gilt $\mathcal{M}^* \subseteq \mathcal{M}$ und damit folgt aus $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ auch $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

- Seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}$ und $\alpha \in [0, 1]$. Definiere $\tilde{Q} := \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$. Da Q_1 und Q_2 Wahrscheinlichkeitsmaße sind, ist \tilde{Q} ebenfalls wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß, denn es gilt $\tilde{Q}(\Omega) = \alpha Q_1(\Omega) + (1 - \alpha)Q_2(\Omega) = \alpha + (1 - \alpha) = 1$. Weiterhin ist der Erwartungswert auch linear bezüglich des jeweiligen Maßes. Jede Q_1 - und Q_2 -integrierbare Zufallsvariable X ist daher ebenfalls \tilde{Q} -integrierbar und es gilt

$$\mathbb{E}_{\tilde{Q}} X = \alpha \mathbb{E}_{Q_1} X + (1 - \alpha) \mathbb{E}_{Q_2} X.$$

Damit können wir nun zeigen, dass die diskontierten Preisprozesse (\tilde{S}_t^k) für alle $k = 1, \dots, d$ auch Martingale bezüglich dem Maß \tilde{Q} sind. Es gilt nämlich für alle $t \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{Q}}[\tilde{S}_{t+1}^k | \mathcal{F}_t] &= \alpha \mathbb{E}_{Q_1}[\tilde{S}_{t+1}^k | \mathcal{F}_t] + (1 - \alpha) \mathbb{E}_{Q_2}[\tilde{S}_{t+1}^k | \mathcal{F}_t] \\ &= \alpha \tilde{S}_t^k + (1 - \alpha) \tilde{S}_t^k \\ &= \tilde{S}_t^k, \quad \tilde{Q}\text{-f.s.} \end{aligned}$$

Es gilt somit $\tilde{Q} \in \mathcal{M}$.

Seien nun $Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}^*$ und $\alpha \in [0, 1]$. Definiere wieder $\tilde{Q} := \alpha Q_1 + (1 - \alpha)Q_2$. Wir wissen bereits, dass $\tilde{Q} \in \mathcal{M}$ und müssen nur noch zeigen, dass \tilde{Q} äquivalent zu \mathbb{P} ist. Da Q_1 und Q_2 aber nach Definition bereits äquivalent zu \mathbb{P} sind, gilt sofort für alle $\omega \in \Omega$

$$\tilde{Q}(\{\omega\}) = \alpha \underbrace{Q_1(\{\omega\})}_{>0} + (1 - \alpha) \underbrace{Q_2(\{\omega\})}_{>0} > 0.$$

\tilde{Q} ist somit äquivalent zu \mathbb{P} und damit $\tilde{Q} \in \mathcal{M}^*$. Folglich sind beide Mengen \mathcal{M} und \mathcal{M}^* konvex.

b) Wir zeigen zunächst, dass die Menge \mathcal{M} abgeschlossen ist. Sei dazu $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in \mathcal{M} , deren Grenzwert wir Q nennen, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\{\omega\}) = Q(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega.$$

Q ist dann wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß, da $Q(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(\Omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$. Ferner ist Q auch wieder ein Martingalmaß, da

$$\mathbb{E}_Q[\tilde{S}_{t+1}^k | \mathcal{F}_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{Q_n}[\tilde{S}_{t+1}^k | \mathcal{F}_t] = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_t^k = \tilde{S}_t^k$$

für alle $k = 1, \dots, d$ und alle $t \in \mathbb{N}_0$. Es gilt somit $Q \in \mathcal{M}$. Die Menge \mathcal{M} ist also abgeschlossen, woraus wir sofort $\overline{\mathcal{M}^*} \subseteq \mathcal{M}$ folgern können. Wir müssen also nur noch $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}^*}$ zeigen, d.h. zu jedem $Q \in \mathcal{M}$ soll eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^*$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ existieren.

Sei dazu $Q \in \mathcal{M}$. Da $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$, existiert ein Element $Q_0 \in \mathcal{M}^*$. Definiere nun eine Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$Q_n := \frac{n-1}{n} Q + \frac{1}{n} Q_0.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist Q_n eine Konvexkombination von Elementen aus \mathcal{M} . Nach Aufgabenteil a) gilt daher $Q_n \in \mathcal{M}$. Da Q_0 aber sogar ein äquivalentes Martingalmaß ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$ auch

$$Q_n(\{\omega\}) = \frac{n-1}{n} \underbrace{Q(\{\omega\})}_{\geq 0} + \frac{1}{n} \underbrace{Q_0(\{\omega\})}_{> 0} > 0.$$

Es gilt somit $Q_n \in \mathcal{M}^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ferner gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} Q + \frac{1}{n} Q_0 \right) = Q.$$

Somit haben wir $\mathcal{M} \subseteq \overline{\mathcal{M}^*}$ und damit $\overline{\mathcal{M}^*} = \mathcal{M}$ gezeigt.