

Lösungsblatt 5

Aufgabe 1 (Ehemalige Klausuraufgabe zu äquivalenten Martingalmaßen)

Betrachten Sie die folgenden drei einperiodigen Finanzmärkte:

(A) $\Omega = \{u, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0 = 1$ und

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

(B) $\Omega = \{u, m, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0 = 1$ und

$$S_1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{2}{3}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

(C) $\Omega = \{u, m, d\}$, $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{4}{3}$, $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und

$$S_1^1(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = d, \end{cases} \quad S_1^2(\omega) = \begin{cases} \frac{5}{3}, & \text{falls } \omega = u, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = m, \\ \frac{8}{9}, & \text{falls } \omega = d. \end{cases}$$

- Welche der Modelle sind arbitragefrei? Beschreiben Sie für diese die Menge der äquivalenten Martingal-
maße. Finden Sie für alle anderen Modelle eine Arbitragestrategie und weisen Sie nach, dass es sich um
eine Arbitragestrategie handelt.
- Welche der arbitragefreien Modelle sind vollständig? Begründen Sie Ihre Aussage.

Lösungsvorschlag:

(A): Offenbar handelt es sich beim Finanzmarkt (A) um ein einperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit
Up-Faktor $u = \frac{5}{3}$, Down-Faktor $d = \frac{2}{3}$ und $r = \frac{1}{3}$. Wegen $d < r + 1 < u$, ist der Finanzmarkt (A)
arbitragefrei. Sei \mathbb{Q} definiert durch $\mathbb{Q}(\{u\}) := q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ und $\mathbb{Q}(\{d\}) := 1 - q = \frac{1}{3}$. Dann ist die Menge
der äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* = \{\mathbb{Q}\}.$$

(B): Für ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} auf $\Omega = \{u, m, d\}$ muss gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1}{B_1} \right] = S_0 &\iff \frac{5}{3}q_1 + \frac{2}{3}q_2 + \frac{5}{9}q_3 = \frac{4}{3}, \\ q_1 + q_2 + q_3 &= 1, \\ q_1, q_2, q_3 &> 0, \end{aligned}$$

wobei $q_1 := \mathbb{Q}(\{u\})$, $q_2 := \mathbb{Q}(\{m\})$, $q_3 := \mathbb{Q}(\{d\})$. Umstellen der zweiten Gleichung nach q_2 und Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}q_1 + \frac{2}{3}(1 - q_1 - q_3) + \frac{5}{9}q_3 &= \frac{4}{3} \\ \iff q_1 - \frac{1}{9}q_3 &= \frac{2}{3} \\ \iff q_1 &= \frac{6 + q_3}{9}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $q_1 \in (0, 1)$ für $q_3 \in (0, 1)$. Analog ergibt sich durch Umstellen der zweiten Gleichung nach q_1 und Einsetzen in die erste Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}(1 - q_2 - q_3) + \frac{2}{3}q_2 + \frac{5}{9}q_3 &= \frac{4}{3} \\ \iff -q_2 - \frac{10}{9}q_3 &= -\frac{1}{3} \\ \iff q_2 &= \frac{3 - 10q_3}{9}. \end{aligned}$$

Es gilt $q_2 \in (0, 1)$ falls $q_3 \in (0, \frac{3}{10})$. Somit ist die Menge der äquivalenten Martingalmaße gegeben durch

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 = \frac{6 + q_3}{9}, q_2 = \frac{3 - 10q_3}{9}, q_3 \in (0, \frac{3}{10}) \right\}.$$

Nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie (Theorem 5.8) ist Finanzmarkt (B) arbitragefrei, da $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$. Es gibt weitere Möglichkeiten, \mathcal{M}^* zu parametrisieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^* &= \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 \in \left(\frac{6}{9}, \frac{7}{10}\right), q_2 = 7 - 10q_1, q_3 = 9q_1 - 6 \right\}, \\ \mathcal{M}^* &= \left\{ \mathbb{Q} \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \Omega : q_1 = \frac{7 - q_2}{10}, q_2 \in \left(0, \frac{1}{3}\right), q_3 = \frac{3 - 9q_2}{10} \right\}. \end{aligned}$$

(C): Für ein Martingalmaß \mathbb{Q} auf $\Omega = \{u, m, d\}$ muss gelten $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_i^j}{B_1} \right] = S_0^j$, $i = 1, 2$, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}q_1 + \frac{5}{3}q_2 + \frac{8}{9}q_3 &= \frac{4}{3}, \\ \frac{5}{3}q_1 + \frac{5}{9}q_2 + \frac{8}{9}q_3 &= \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

wobei $q_1 := \mathbb{Q}(\{u\})$, $q_2 := \mathbb{Q}(\{m\})$, $q_3 := \mathbb{Q}(\{d\})$. Die Differenz der beiden Gleichungen liefert $q_2 = 0$. Somit existiert keine äquivalentes Martingalmaß, denn dafür müsste $q_1, q_2, q_3 > 0$ erfüllt sein. Also ist der Finanzmarkt (C) nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie nicht arbitragefrei.

Es ist leicht zu sehen, dass die Handelsstrategie $\varphi = (\alpha_0, \beta_0)$ mit $\alpha_0 = (1, -1)$ und $\beta_0 = 0$ eine Arbitragestrategie ist. Tatsächlich ist

$$V_0^\varphi = \alpha_0^1 + \alpha_0^2 + \beta_0 = 1 - 1 + 0 = 0$$

und

$$V_1^\varphi(\omega) = \alpha_0^1 S_1^1(\omega) + \alpha_0^2 S_1^2(\omega) + \beta_0 B_1 = S_1^1(\omega) - S_1^2(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Folglich gilt $\mathbb{P}(V_1^\varphi \geq 0) = 1$. Außerdem gilt $\mathbb{P}(V_1^\varphi > 0) > 0$, da $S_1^1(m) - S_1^2(m) = \frac{7}{9} > 0$.

Zur Vollständigkeit:

Wir untersuchen die arbitragefreien Modelle (A) und (B) auf Vollständigkeit:

(A): Es gilt $|\mathcal{M}^*| = 1$. Somit ist Finanzmarkt (A) nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie (Theorem 6.1) vollständig. Da es sich um ein CRR-Modell handelt, kann man alternativ mit Theorem 3.2 argumentieren.

(B): Es gilt $|\mathcal{M}^*| > 1$. Somit ist Finanzmarkt (B) nach dem zweiten Hauptsatz der Preistheorie nicht vollständig.

Aufgabe 2 (Ein Markt mit abzählbar vielen Aktien)

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(\{n\}) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, betrachte man einen einperiodigen Finanzmarkt mit zinslosem Bond B (d.h. $B_0 = B_1 = 1$) und abzählbar vielen Aktien $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots$ mit

$$S_0^{(i)} = 1, S_1^{(i)}(n) = \begin{cases} 0, & n = i, \\ 2, & n = i + 1, \\ 1, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Handelsstrategien sind Folgen $(\varphi^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_0}$ von Stückzahlen für Bond ($i=0$) und alle Aktien mit $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} |\varphi^{(i)}| < \infty$.

- Zeigen Sie, dass dieser Markt arbitragefrei ist.
- Zeigen Sie, dass kein risikoneutrales Maß existiert. Warum ist das kein Widerspruch zum ersten Hauptsatz?

Lösungsvorschlag:

- Eine Arbitragestrategie $\varphi = (\varphi^{(i)})_{i \in \mathbb{N}_0}$ müsste

$$V_0^\varphi = \varphi^{(0)} B_0 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi^{(i)} S_0^{(i)} = 0, \quad (1)$$

$$V_1^\varphi(n) = \varphi^{(0)} B_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi^{(i)} S_1^{(i)}(n) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

$$V_1^\varphi(n) = \varphi^{(0)} B_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi^{(i)} S_1^{(i)}(n) > 0 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \quad (3)$$

erfüllen. Insbesondere müsste für $n = 1$ wegen (2)

$$\begin{aligned} 0 \leq V_1^\varphi(1) &= \varphi^{(0)} \underbrace{B_1}_{=1} + \varphi^{(1)} \underbrace{S_1^{(1)}(1)}_{=0} + \sum_{i=2}^{\infty} \varphi^{(i)} \underbrace{S_1^{(i)}(1)}_{=1} = -\varphi^{(1)} + \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \varphi^{(i)} = -\varphi^{(1)} + \underbrace{\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \varphi^{(i)} S_0^{(i)}}_{=V_0^\varphi=0(1)} \\ &= -\varphi^{(1)}, \end{aligned}$$

also $\varphi^{(1)} \leq 0$ gelten. Analog folgt für $n > 1$

$$0 \leq V_1^\varphi(n) = \varphi^{(0)} + 2\varphi^{(n-1)} + \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ i \neq n, \\ i \neq (n-1)}} \varphi^{(i)} = V_0^\varphi + \varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n)},$$

also $\varphi^{(n)} \leq \varphi^{(n-1)}$, und die Glieder von φ bilden ab dem Index 1 eine in den nichtpositiven Zahlen absteigende Folge. Wäre für irgendeinen Index $\hat{n} \geq 1$ tatsächlich $\varphi^{(\hat{n})} < 0$, würde die Reihe $\sum_{i \in \mathbb{N}} |\varphi^{(i)}|$ im Widerspruch zur Voraussetzung divergieren. Also müssen alle Glieder ab dem Index 1 verschwinden und wegen (1) muss darüberhinaus $\varphi^{(0)} = 0$ gelten. Damit ist aber das Endvermögen in jedem Fall null, denn $V_1^\varphi(n) = \varphi^{(0)} B_1 + \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi^{(i)} S_1^{(i)}(n) = 0$, was ein Widerspruch zu (3) wäre. Somit es gibt keine Arbitrage.

- Falls es ein risikoneutrales Maß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ gäbe, wäre $(\frac{S_t}{B_t})_{t=0,1}$ ein \mathbb{Q} -Martingal, also insbesondere

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(i)}}{B_1} \right] = \frac{S_0^{(i)}}{B_0} = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}. \text{ Andererseits gilt}$$

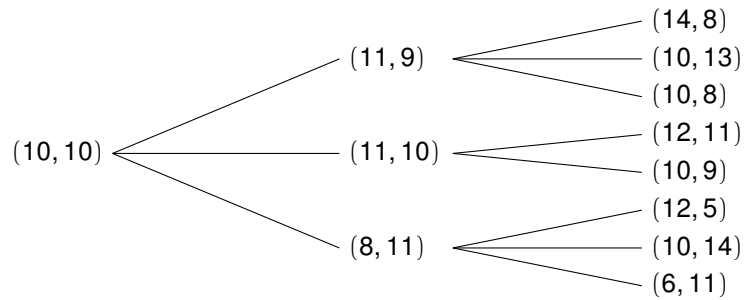
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(i)}}{B_1} \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} S_1^{(i)}(n) \mathbb{Q}(\{n\}) = 2\mathbb{Q}(\{i+1\}) + \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ n \neq i, \\ n \neq i+1}} \mathbb{Q}(\{n\}) = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\{n\})}_{=1} + \mathbb{Q}(\{i+1\}) - \mathbb{Q}(\{i\}),$$

also zusammen $\mathbb{Q}(\{i+1\}) = \mathbb{Q}(\{i\})$ für alle $i \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Q}(\{i\}) \equiv \mathbb{Q}(\{1\})$. Wäre $\mathbb{Q}(\{1\}) > 0$, divergierte die Reihe über alle $\mathbb{Q}(\{i\})$, was im Widerspruch zur Normiertheit von \mathbb{Q} stünde. Also muss $\mathbb{Q}(\{1\}) = 0$ gelten, was aber im Widerspruch zu $\mathbb{Q}(\mathbb{N}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(\{i\}) = 1$ steht aber für ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} erfüllt sein müsste.

Es gilt also (NA) und dennoch existiert kein risikoneutrales Maß. Das steht nicht im Widerspruch zum ersten Hauptsatz (Theorem 5.8), denn dort wird ein endlicher Finanzmarkt vorausgesetzt, den wir hier offensichtlich nicht haben.

Aufgabe 3 (Ein Markt mit 2 Aktien)

Vorgelegt sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit zinsfreiem normierten Bond (d.h. $B_0 = B_1 = B_2 = 1$) und zwei Aktien $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$. Die Kursentwicklung der Aktien in Tupelschreibweise $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$ für $t = 0, 1, 2$ sei wie folgt:



- Ist dieser Markt arbitragefrei und vollständig? Bestimmen Sie ggf. die äquivalenten Martingalmaße.
- Was kostet ein Europäischer Call mit Basispreis $K = 10$ auf die zweite Aktie?

Lösungsvorschlag:

- Sei $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ die von $(S^{(1)}, S^{(2)})$ erzeugte Filtration. Die Arbitragefreiheit entscheidet sich nach dem ersten Hauptsatz der Preistheorie (Theorem 5.8) daran, ob wir ein äquivalentes Martingalmaß konstruieren können. Für ein solches Maß \mathbb{Q} muss dann für $t = 0, 1$ und $i = 1, 2$ jeweils

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{t+1}^{(i)}}{B_{t+1}} \mid \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_t^{(i)}}{B_t}$$

gelten. Für $t = 0$ bedeutet das

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(1)}}{B_1} \mid \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(1)}}{B_0} = (11 - 10)q + (11 - 10)q' + (8 - 10)(1 - q - q'),$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(2)}}{B_1} \mid \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(2)}}{B_0} = (9 - 10)q + (10 - 10)q' + (11 - 10)(1 - q - q').$$

Dabei bezeichnet q die Wahrscheinlichkeit des oberen Pfades und q' die Wahrscheinlichkeit des mittleren Pfades. Da wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß suchen, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des unteren Pfades zu $(1 - q - q')$. Die Lösung dieses LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen ist $q = q' = \frac{1}{3}$. Für $t = 1$ müssen wir in \mathcal{F}_1 die drei möglichen Kursentwicklungen des ersten Schritts unterscheiden. Man erhält mit analogem Ansatz für jede der drei Möglichkeiten ein Gleichungssystem wie oben. Die Lösungen sind mit gleicher Benennung wie oben $q = \frac{1}{4}, q' = \frac{1}{5}$ für den oberen Zweig, $q = \frac{1}{2}$ für den (nur zweiarmligen) mittleren Zweig und $q = \frac{1}{7}, q' = \frac{2}{7}$ für den unteren Zweig. Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu bestimmen, muss man die zum Pfad gehörenden q 's multiplizieren. Nummeriert man die Ereignisse von oben nach unten durch, erhält man

i	$(S_2^{(2)}(\omega_j) - K)^+$	$\mathbb{Q}(\{\omega_j\})$
1	0	$\frac{1}{12}$
2	3	$\frac{1}{15}$
3	0	$\frac{11}{60}$
4	1	$\frac{1}{6}$
5	0	$\frac{1}{6}$
6	0	$\frac{1}{21}$
7	4	$\frac{2}{21}$
8	1	$\frac{4}{21}$

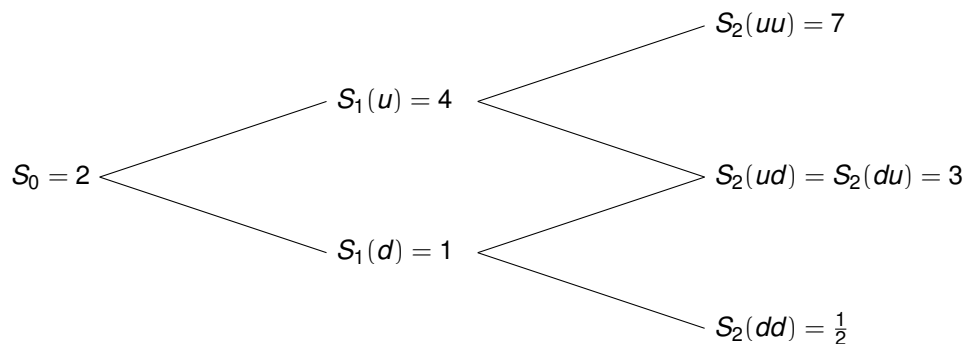
Die Auszahlung des in Aufgabenteil b) formulierten Calls ist hier gleich mitnotiert. Nach Konstruktion ist also Q ein Martingalmaß und da jedes der 8 Elementarereignisse unter Q eine echt positive Wahrscheinlichkeit hat, ist dies auch ein \mathbb{P} -äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß. Da der betrachtete Finanzmarkt endlich ist können wir aus dem ersten Hauptsatz der Preistheorie (Theorem 5.8) folgern, dass der Markt arbitragefrei ist.

- b) Wir wollen einen Europäischen Call mit Ausübungspreis $K = 10$ auf die zweite Aktie bewerten. Setze $H := (S_2^{(2)} - K)^+$. Mithilfe des Maßes Q aus Aufgabenteil a) können wir die risikoneutrale Bewertungsformel (Theorem 7.2) verwenden:

$$\pi(H) = \mathbb{E}_Q \left[\frac{H}{B_2} \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \mathbb{E}_Q [H] = 3 \cdot \frac{1}{15} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{2}{21} + 1 \cdot \frac{4}{21} = \frac{197}{210}.$$

Aufgabe 4 (Eine alte Klausuraufgabe)

Betrachte einen zweiperiodigen endlichen Finanzmarkt mit einem risikolosen Wertpapier mit $B_0 = 1$, $B_1 = (1+r)$, $B_2 = (1+r)^2$, $r \geq 0$ und einer risikobehafteten Anlage, die sich wie folgt entwickeln kann:



- a) Für welche Werte $r \geq 0$ ist der Markt arbitragefrei?
 b) Es sei $r = \frac{4}{5}$. Finden Sie eine Arbitragestrategie.
 c) Der Markt sei jetzt arbitragefrei und ein europäischer Call auf die risikobehaftete Anlage mit Fälligkeit $T = 2$ und Basispreis $K = 6$ werde zur Zeit $t = 0$ zum Preis $\frac{2}{3}$ gehandelt. Welchen Wert besitzt r ?

Lösungsvorschlag:

- a) Hier liegt CRR-Modell mit zustandsabhängigen Faktoren $r, u_0, d_0, u_1(\cdot), d_1(\cdot)$ vor. Für Arbitragefreiheit muss demnach gelten:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \frac{1}{2} = d < 1+r < u = 2 \iff -\frac{1}{2} < r < 1 \\ \text{(ii)} \quad & \frac{3}{4} = d_1(u) < 1+r < u_1(u) = \frac{7}{4} \iff -\frac{1}{4} < r < \frac{3}{4} \\ \text{(iii)} \quad & \frac{1}{2} = d_1(d) < 1+r < u_1(d) = 3 \iff -\frac{1}{2} < r < 2 \end{aligned}$$

D.h. der Markt ist für $0 \leq r < \frac{3}{4}$ arbitragefrei.

- b) Definiere die \mathcal{F}_1 -messbare Zufallsvariable $\eta := -\mathbb{1}_{\{(u,u), (u,d)\}}$. Wegen

$$\eta(\tilde{S}_2(\omega) - \tilde{S}_1(\omega)) = \begin{cases} -\left(\frac{7}{1.8^2} - \frac{4}{1.8}\right) > 0, & \omega = (u, u) \\ -\left(\frac{3}{1.8^2} - \frac{4}{1.8}\right) > 0, & \omega = (u, d) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist $\varphi = (\alpha, \beta)$ mit $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = \eta, \beta_0 = 0$ und $\beta_1 = -\frac{4}{1+r}\eta$ nach dem Satz über lokale Arbitrage (Theorem 2.11) eine Arbitragestrategie. Der Wert von β_1 ergibt sich dabei aus den Selbstfinanzierungsbedingungen

$$\begin{aligned} 0 &= V_1^\varphi(u) = \beta_1(u)B_1 + \alpha_1(u)S_1(u) = \beta_1(u)(1+r) - 4 \\ \text{und } 0 &= V_1^\varphi(d) = \beta_1(d)B_1 + \alpha_1(d)S_1(d) = \beta_1(d)(1+r) + 0. \end{aligned}$$

c) Das eindeutige äquivalente Martingalmaß Q ist charakterisiert durch die Parameter

$$q_0 = \frac{1+r-d_0}{u_0-d_0} = \frac{1+r-\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}r + \frac{1}{3},$$
$$q_1(u) = \frac{1+r-d_1(u)}{u_1(u)-d_1(u)} = \frac{1+r-\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}-\frac{3}{4}} = r + \frac{1}{4},$$
$$q_1(d) = \frac{1+r-d_1(d)}{u_1(d)-d_1(d)} = \frac{1+r-\frac{1}{2}}{3-\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}r + \frac{1}{5}.$$

Mit der risikoneutralen Bewertungsformel folgt

$$\frac{2}{9} = \pi(H) \stackrel{!}{=} \frac{1}{(1+r)^2} \mathbb{E}_Q[(S_2 - 6)^+] = \frac{1}{(1+r)^2} \left(\frac{2}{3}r + \frac{1}{3} \right) \left(r + \frac{1}{4} \right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}r^2 + \frac{1}{18}r - \frac{5}{36} = 0$$
$$\stackrel{r \geq 0}{\Rightarrow} r = \frac{1}{2}.$$