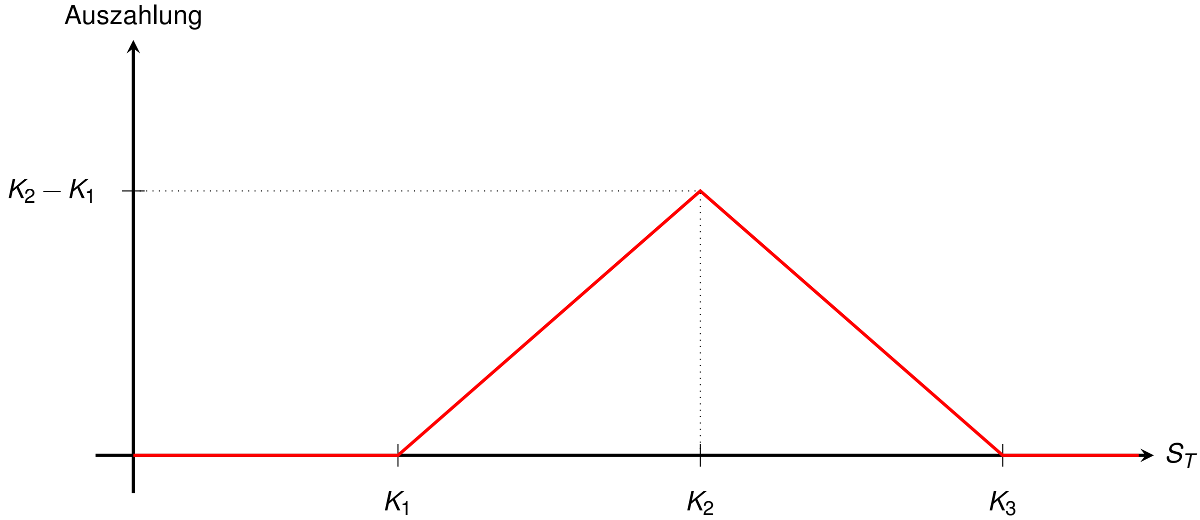
Lösungsblatt 6

Aufgabe 1 (Butterfly-Spread)

Ein Butterfly-Spread ist ein Zahlungsanspruch $H = h(S_T)$ mit folgendem Auszahlungsprofil:



Hier ist $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)$ und S_T der Schlusskurs einer zu Grunde liegenden Aktie. Replizieren Sie den Anspruch ausschließlich mit Europäischen Calls auf die selbe Aktie. Können Sie das auch mit Europäischen Puts erreichen? Zeichnen Sie die einzelnen Auszahlungsprofile.

Lösungsvorschlag:
Bezeichnen wir mit $H_C^E(K)$ die Auszahlung eines europäischen Calls und mit $H_P^E(K)$ die Auszahlung eines europäischen Puts jeweils mit Basispreis K. So erhalten wir die Auszahlungsprofile in Abbildung 1 und 2. Für die negativen Auszahlungen siehe Abbildung 3 und 4.

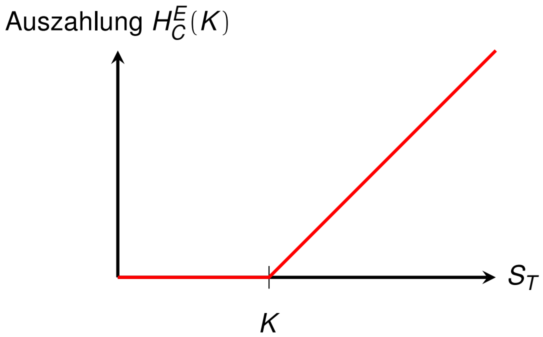


Abbildung 1: Auszahlungsprofil europ. Call

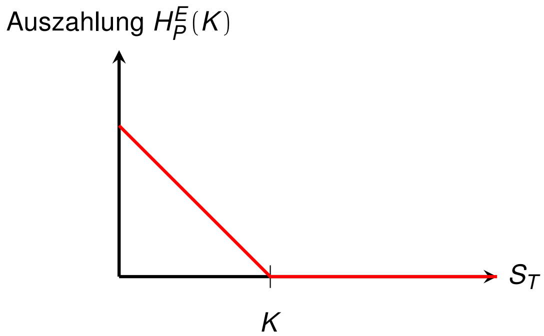


Abbildung 2: Auszahlungsprofil europ. Put

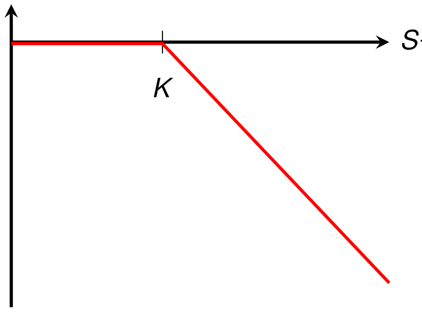


Abbildung 3: Auszahlungsprofil negativer europ. Call

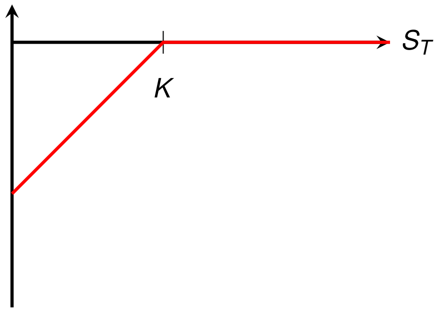


Abbildung 4: Auszahlungsprofil negativer europ. Put

Wollen wir nun den Butterfly-Spread durch europ. Calls replizieren, vgl. dazu Abbildung 5.

- Bilde das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads für $S_T \in [0, K_2]$ durch einen europ. Call $H_C^E(K_1)$ nach (orange).
  Problem: Für $S_T > K_2$ steigt dieses Auszahlungsprofil mit Steigung 1, das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads sollte aber mit Steigung -1 von $K_2 - K_1$ auf Null fallen.

- Wir addieren also eine Kurve, die bis K_2 Null ist und ab dann mit Steigung -2 fällt. Das ist gerade das Auszahlungsprofil von $-2H_C^E(K_2)$ (grün). So erhalten wir das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads auf $[0, K_3]$
  Problem: Das Auszahlungsprofil von $H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2)$ fällt ab K_3 mit Steigung -1, das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads sollte aber konstant 0 sein.

- Wir addieren also eine Kurve, die auf $[0, K_3]$ konstant 0 ist und dann mit Steigung 1 wächst, d.h. das Auszahlungsprofil von $H_C^E(K_3)$ (blau).

Damit ist das Auszahlungsprofil des Butterfly-Spreads

$$B(K_1, K_2, K_3) = H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2) + H_C^E(K_3) \tag{1}$$

repliziert. Formal rechnet man nun nach, dass diese Gleichung für alle $S_T \geqslant 0$ erfüllt ist. Hierzu verwenden wir die Definitionen der Auszahlungsprofile:

$$H_C^E(K_i) = \mathbb{1}_{S_T > K_i}(S_T - K_i) \text{ für } i = 1, 2, 3$$

sowie die Definition des Auszahlungsprofils des Butterfly-Spreads:

$$B(K_1, K_2, K_3) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant S_T < K_1 \\ S_T - K_1, & K_1 \leqslant S_T < K_2 \\ K_3 - S_T, & K_2 \leqslant S_T < K_3 \\ 0, & K_3 \leqslant S_T < \infty. \end{cases}$$

Für $0 \leqslant S_T \leqslant K_1$ ist $\mathbb{1}_{S_T > K_i} = 0$ für $i = 1, 2, 3$ und somit gilt (1). Auf dem Intervall $(K_1; K_2]$ ist $\mathbb{1}_{S_T > K_1} = 1$ sowie $\mathbb{1}_{S_T > K_i} = 0$ für $i = 2, 3$ und daher gilt (1) ebenfalls. Auf $(K_2, K_3]$ ist nur $\mathbb{1}_{S_T > K_3} = 0$, die anderen beiden Indikatoren sind 1. Wir erhalten hier also (beachte die Definition von $K_2 = \frac{1}{2}(K_1 + K_3)$)

$$\begin{aligned} H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2) + H_C^E(K_3) &= H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2) \\ &= S_T - K_1 - 2(S_t - K_2) \\ &= 2K_2 - K_1 - S_T \\ &= 2(\frac{1}{2}(K_1 + K_3)) - K_1 - S_T \\ &= K_3 - S_T. \end{aligned}$$

Auf (K_3, ∞) sind alle Indikatoren 1 und wir erhalten:

$$\begin{aligned} H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2) + H_C^E(K_3) &= H_C^E(K_1) - 2H_C^E(K_2) + H_C^E(K_3) \\ &= S_T - K_1 - 2(S_t - K_2) + S_T - K_3 \\ &= 2K_2 - K_1 - K_3 \\ &= 2(\frac{1}{2}(K_1 + K_3)) - (K_1 + K_3) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analoge Betrachtungen liefern, dass man den Butterfly-Spread auch über europ. Put Optionen replizieren kann:

$$B(K_1, K_2, K_3) = H_P^E(K_3) - 2H_P^E(K_2) + H_P^E(K_1).$$

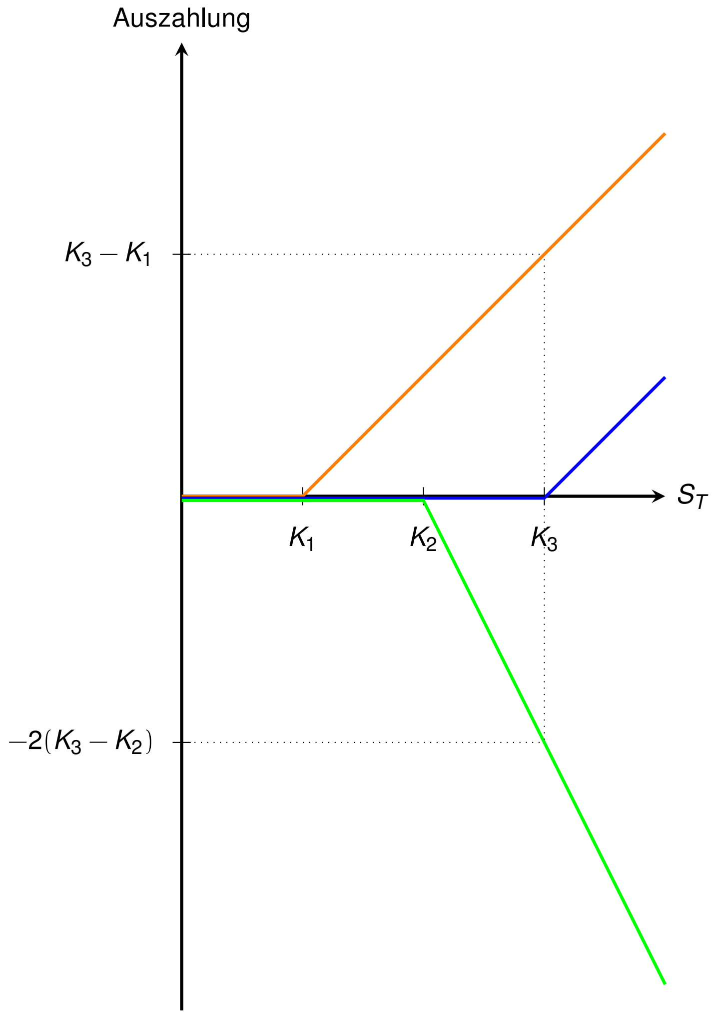


Abbildung 5: Replizieren des Butterfly-Spreads durch europ. Call Optionen: Auszahlung von $H_C^E(K_1)$ (orange), Auszahlung von $H_C^E(K_3)$ (blau), Auszahlung von $-2H_C^E(K_2)$ (grün).

Aufgabe 2 (Financial Engineering)

Gegeben sei ein arbitragefreier und vollständiger Finanzmarkt mit einem Bond B und einer Aktie S. Weiter seien drei Call-Optionen mit unterschiedlichen Basispreisen K und gleichem Ausübungszeitpunkt T gegeben. Diese besitzen zur Zeit $t = 0$ die folgenden fairen Preise:

Basispreis K	Preis
95	12.34
100	10.56
105	9.86

a) Bestimmen Sie den fairen Preis der europäischen Option H mit Ausübungszeitpunkt T zur Zeit $t = 0$, wobei

$$H := \begin{cases} 0 & , S_T < 95, \\ S_T - 95 & , 95 \leqslant S_T < 105, \\ 10 & , S_T \geqslant 105. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie den fairen Preis der europäischen Option $\widetilde{H}$ mit Ausübungszeitpunkt T zur Zeit $t = 0$, wobei

$$\widetilde{H} := \begin{cases} 0 & , S_T < 95, \\ S_T - 95 & , 95 \leqslant S_T < 100, \\ 105 - S_T & , 95 \leqslant 100 \leqslant S_T < 105, \\ 0 & , S_T \geqslant 105. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

Wir definieren

$$H_1 := (S_T - 95)^+, \qquad H_2 := (S_T - 100)^+, \qquad H_3 := (S_T - 105)^+.$$

a) Es gilt $H = H_1 - H_3$, da wir bis zu einem Aktienpreis von $S_T = 105$ einen Zahlungsanspruch vorliegen haben, der mit einem Call mit Basispreis $K = 95$ übereinstimmt. Für $S_T \geqslant 105$ steigt der Zahlungsanspruch nicht weiter an, sondern bleibt konstant. Dies kann erreicht werden, indem der Zahlungsanspruch H_1 mit dem Zahlungsanspruch H_3 ausgeglichen wird.

- Sei $S_T < 95$. Dann gilt

$$H_1 - H_3 = (S_T - 95)^+ - (S_T - 105)^+ = 0 - 0 = H.$$

- Sei $95 \leqslant S_T < 105$. Dann gilt

$$H_1 - H_3 = (S_T - 95)^+ - (S_T - 105)^+ = S_T - 95 = H.$$

- Sei $S_T \geqslant 105$. Dann gilt

$$H_1 - H_3 = (S_T - 95)^+ - (S_T - 105)^+ = S_T - 95 - (S_T - 105) = 105 - 95 = 10 = H.$$

Auf Grund der Linearität der Preisformel folgt somit:

$$\pi(H) = \pi(H_1) - \pi(H_3) = 12.34 - 9.86 = 2.48.$$

b) $\widetilde{H}$ entspricht einem Butterfly-Spread, vgl. Aufgabe 1, mit $K_1 = 95$, $K_2 = 100$ und $K_3 = 105$. Dort wurde gezeigt, dass

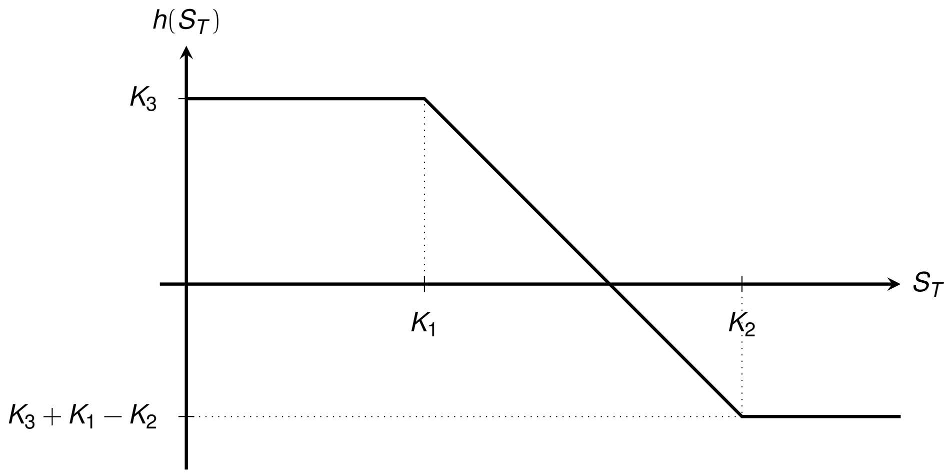
$$\widetilde{H} = H_1 - 2 \cdot H_2 + H_3$$

gilt. Auf Grund der Linearität der Preisformel folgt somit:

$$\pi(\widetilde{H}) = \pi(H_1) - 2 \cdot \pi(H_2) + \pi(H_3) = 12.34 - 2 \cdot 10.56 + 9.86 = 1.08.$$

Aufgabe 3 (Financial Engineering 2)

Betrachten Sie einen Zahlungsanspruch $H = h(S_T)$ mit folgendem Auszahlungsprofil:



Hierbei sind $0 \leqslant K_1 \leqslant K_2$, $0 \leqslant K_3 \leqslant K_2 - K_1$ und S_T der Schlusskurs der zu Grunde liegenden Aktie.

a) Bilden Sie H mit Europäischen Call-Optionen auf die selbe Aktie und durch eine Investition in das risikolose Wertpapier nach.

b) Berechnen Sie den Preis von H zur Zeit $t = 0$ im zweiperiodigen Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit Parametern $u = \frac{5}{4}$, $d = \frac{4}{5}$, $r = \frac{1}{20}$, $K_1 = 75$, $K_2 = 125$, $K_3 = 30$ und $S_0 = 100$.

c) Wie viele Aktien werden in der Hedgingstrategie für H zur Zeit $t = 0$ gehalten?

Lösungsvorschlag:

a) Offenbar gilt für H die Darstellung

$$H = \begin{cases} K_3, & S_T \leqslant K_1 \\ K_3 + K_1 - S_T, & K_1 \leqslant S_T \leqslant K_2 \\ K_3 + K_1 - K_2, & S_T \geqslant K_2. \end{cases}$$

Damit schreiben wir

$$\begin{aligned} H &= K_3 \mathbb{1}_{\{S_T \leqslant K_1\}} + (K_3 + K_1 - S_T)\mathbb{1}_{\{K_1 \leqslant S_T \leqslant K_2\}} + (K_3 + K_1 - K_2)\mathbb{1}_{\{K_2 \leqslant S_T\}} \\ &= K_3 - (S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 \leqslant S_T \leqslant K_2\}} + (-(S_T - K_1) + (S_T - K_2))\,\mathbb{1}_{\{K_2 \leqslant S_T\}} \\ &= K_3 - (S_T - K_1)\mathbb{1}_{\{K_1 \leqslant S_T\}} + (S_T - K_2)\mathbb{1}_{\{K_2 \leqslant S_T\}} \\ &= (S_T - K_2)^+ - (S_T - K_1)^+ + K_3. \end{aligned}$$

H kann also geschrieben werden als Kombination aus zwei Call-Optionen mit Basispreisen K_1 und K_2 und einer risikolosen Anlage in geeigneter Höhe.

b) Wir erhalten in diesem CRR-Markt die Werte $S_2(dd) = 64$, $S_2(ud) = S_2(du) = 100$ und $S_2(uu) = 156.25$, $B_1 = 21/20$ und $B_2 = 441/400$. Ferner sehen wir ein, dass $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{5}{9}$ gilt.

Um nun den Wert des Zahlungsanspruches zu bestimmen müssen wir seine Auszahlungen berechnen. Es gelten

$$H(uu) = (156.25 - 125)^+ - (156.25 - 75)^+ + 30 = 31.25 - 81.25 + 30 = -20,$$

$$H(ud) = H(du) = (100 - 125)^+ - (100 - 75)^+ + 30 = -25 + 30 = 5$$

und

$$H(dd) = (64 - 125)^+ - (64 - 75)^+ + 30 = 30.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\pi_0(H) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{H}{B_2}\right] = \frac{1}{B_2}\left[q^2 H(uu) + 2q(1-q)H(ud) + (1-q)^2 H(dd)\right]\\ &= \frac{400}{441}\left[\frac{25}{81}\cdot(-20) + \frac{40}{81}\cdot 5 + \frac{16}{81}\cdot 30\right] = \frac{400}{441}\frac{180}{81} = \frac{8000}{3969} = 2.0156...\end{aligned}$$

c) Die Hedgingstrategie muss selbstfinanzierend sein, und die Auszahlung von H replizieren. Die Replikationseigenschaft gewährleistet, dass der Teil der Hedgingstrategie in Periode 1 gerade $\pi_1(H)(u)$ bzw. $\pi_1(H)(d)$ kostet. Diese Werte können wir leicht berechnen:

$$\begin{aligned}\pi_1(H)(u) &= \frac{20}{21}\left(\frac{5}{9}\cdot(-20) + \frac{4}{9}\cdot 5\right) = -\frac{1600}{189}\\ \pi_1(H)(d) &= \frac{20}{21}\left(\frac{5}{9}\cdot(5) + \frac{4}{9}\cdot 30\right) = \frac{2900}{189}\end{aligned}$$

Da die Hedgingstrategie selbstfinanzierend sein muss, muss gelten

$$\begin{aligned}\alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(u)\\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 &= \pi_1(H)(d),\end{aligned}$$

sodass $\alpha_0 = \frac{\pi_1(H)(u) - \pi_1(H)(d)}{S_0(u-d)} = -\frac{100}{189}$ gelten muss.

Aufgabe 4 (Hedging in unvollständigen Märkten)

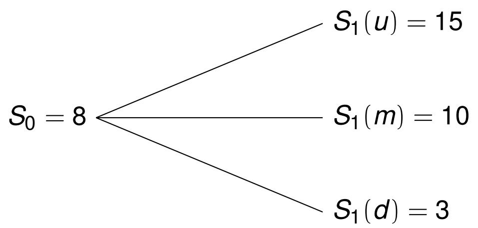
Gegeben sei ein einperiodiger Finanzmarkt, auf dem es ein risikoloses Wertpapier und eine Aktie gibt. Das risikolose Wertpapier besitzt zur Zeit $t = 0$ den Wert von einer Geldeinheit und erwirtschaftet Zinsen in Höhe von 50%. Die Aktie startet mit einem Wert von 8 Geldeinheiten und für ihren Endpreis gibt es drei Möglichkeiten: Der Aktienpreis fällt auf 3, steigt auf 10 oder steigt auf 15 Geldeinheiten. Unter diesen Voraussetzungen ist der Markt arbitragefrei (das müssen Sie nicht nachrechnen).
Ein Derivatehändler verkauft auf diesem Markt einen europäischen Call auf die Aktie mit Basispreis K, wobei bekannt sei, dass $3 \leqslant K < 15$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass genau ein solches K existiert, für das der Zahlungsanspruch erreichbar ist (d. h. eine Hedgingstrategie existiert).

b) Berechnen Sie für dieses K die entsprechende Hedgingstrategie und geben Sie den fairen Preis des Calls an.

Lösungsvorschlag:

a) Für die Aktienpreisentwicklung gilt



Entsprechend erhalten wir $B_0 = 1$ und $B_1 = 1,5$. Bezeichne mit $H = (S_1 - K)^+$ den Zahlungsanspruch des Calls. Da $3 \leqslant K < 15$ gilt, leistet der Call auf jeden Fall keine Auszahlung, wenn der Endkurs der Aktie 3 beträgt und auf jeden Fall eine positive Auszahlung, wenn der Preis auf 15 steigt. Für das mittlere Szenario werden wir später eine Fallunterscheidung durchführen. Der Ansatz für eine Hedgingstrategie (α, β) lautet $H = \alpha S_1 + \beta B_1$. Damit erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}15 - K &= 15\alpha + 1,5\beta,\\ (10-K)^+ &= 10\alpha + 1,5\beta,\\ 0 &= 3\alpha + 1,5\beta.\end{aligned}$$

Aus der dritten Gleichung folgt unmittelbar $\beta = -2\alpha$ und damit erhalten wir die zwei neuen Gleichungen

$$15 - K = 15\alpha - 3\alpha = 12\alpha,$$
$$(10 - K)^+ = 10\alpha - 3\alpha = 7\alpha.$$

Fall 1: $K \geqslant 10$. Dann lautet die zweite Gleichung $0 = 7\alpha$, d. h. $\alpha = 0$. Damit ergibt sich aus der ersten Gleichung aber $K = 15$, was nicht zugelassen war. Somit muss $K < 10$ sein.
Fall 2: $K < 10$. Dann lautet die zweite Gleichung $10 - K = 7\alpha$, d. h. $K = 10 - 7\alpha$. Das setzen wir in die erste Gleichung ein und erhalten $15 - 10 + 7\alpha = 12\alpha$, also die eindeutige Lösung $\alpha = 1$. Dazu gehört der Wert $K = 3$ und die Behauptung folgt.
Alternativer Lösungsweg: Bestimme die Menge aller äquivalenten Martingalmaße $\mathscr{M}^*$ und verwende Theorem 7.10: Ein Zahlungsanspruch ist genau dann erreichbar, wenn die risikoneutrale Bewertungsformel für alle $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^*$ den selben Preis liefert.

b) Die Hedgingstrategie hatten wir in Teil a) schon mitberechnet, sie lautet $(\alpha, \beta) = (1, -2)$. Weil der Markt arbitragefrei ist, können wir den fairen Preis des Calls als Wert der Hedgingstrategie zum Zeitpunkt $t = 0$ angeben. Dieser beträgt $\pi(H) = V_0 = 1 \cdot 8 - 2 \cdot 1 = 6$.