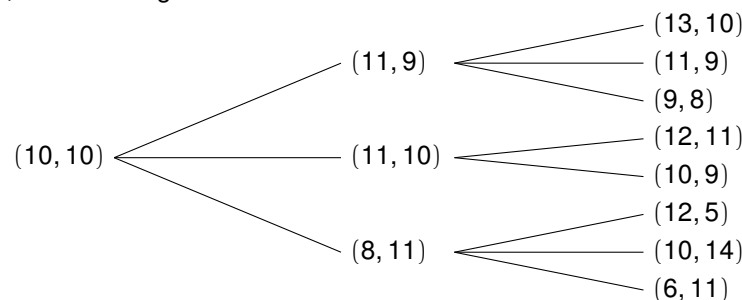


Lösungsblatt 7

Aufgabe 1 (Preisintervalle und Erreichbarkeit)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt über $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit zinsfreiem normierten risikolosen Wertpapier B , d.h. $B_0 = B_1 = B_2 = 1$ und zwei Aktien $S^{(1)}$ und $S^{(2)}$. Die Kursentwicklung der Aktien in Tupelschreibweise $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})$ mit $t = 0, 1, 2$ sei wie folgt:



- Bestimmen Sie die Menge der Martingalmaße \mathcal{M} und die Menge der äquivalenten Martingalmaße \mathcal{M}^* .
- In welchem Preisintervall sollten arbitragefreie Preise für $H_1 := (S_2^{(1)} - S_2^{(2)})^+$ und $H_2 := (9 - S_2^{(2)})^+$ liegen? Ist einer der Zahlungsansprüche erreichbar?

Lösungsvorschlag:

- Sei $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$ die von $(S^{(1)}, S^{(2)})$ erzeugte Filtration. Für ein äquivalentes Martingalmaß \mathbb{Q} muss dann für $t = 0, 1$ und $i = 1, 2$ jeweils

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_{t+1}^{(i)}}{B_{t+1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_t^{(i)}}{B_t}$$

gelten. Für $t = 0$ bedeutet das notwendigerweise (beachte: $S_0^{(i)}$ ist \mathcal{F}_0 -messbar)

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(1)}}{B_1} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(1)}}{B_0} = (11 - 10)q_1 + (11 - 10)q'_1 + (8 - 10)(1 - q_1 - q'_1),$$

$$0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_1^{(2)}}{B_1} \middle| \mathcal{F}_0 \right] - \frac{S_0^{(2)}}{B_0} = (9 - 10)q_1 + (10 - 10)q'_1 + (11 - 10)(1 - q_1 - q'_1).$$

Dabei bezeichnet q die Wahrscheinlichkeit des oberen Pfades und q' die Wahrscheinlichkeit des mittleren Pfades. Da wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß suchen, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit des unteren Pfades zu $(1 - q - q')$. Vereinfacht ergibt sich

$$\begin{aligned} 3q_1 + 3q'_1 &= 2, \\ 2q_1 + q'_1 &= 1. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses LGS mit zwei Gleichungen und zwei Variablen ist $q_1 = q'_1 = \frac{1}{3}$.

Für $t = 1$ müssen wir in \mathcal{F}_1 die drei möglichen Kursentwicklungen des ersten Schritts unterscheiden. Man erhält mit analogem Ansatz für jede der drei Möglichkeiten ein Gleichungssystem wie oben.

Im oberen Pfad erhalten wir das LGS

$$\begin{aligned} 0 &= (13 - 11)q_2(u) + (11 - 11)q_2'(u) + (9 - 11)(1 - q_2(u) - q_2'(u)), \\ 0 &= (10 - 9)q_2(u) + (9 - 9)q_2'(u) + (8 - 9)(1 - q_2(u) - q_2'(u)), \end{aligned}$$

das vereinfacht zu

$$\begin{aligned} 2 &= 4q_2(u) + 2q_2'(u), \\ 1 &= 2q_2(u) + 1q_2'(u) \end{aligned}$$

wird. Wir stellen fest, dass dieses durch $q_2'(u) = 1 - 2q_2(u)$ gelöst wird. Damit ergibt sich insgesamt das Tripel der Wahrscheinlichkeiten $(q_2(u), 1 - 2q_2(u), q_2(u))$.

Die Lösungen für die übrigen LGS sind mit gleicher Benennung $q_2(m) = \frac{1}{2}$ für den (nur zweiarmligen) mittleren Zweig und $q_2(d) = \frac{1}{7}$, $q_2'(d) = \frac{2}{7}$ für den unteren Zweig.

Um die Wahrscheinlichkeit eines Pfades zu bestimmen, muss man die zum Pfad gehörenden q 's multiplizieren. Nummeriert man die Ereignisse von oben nach unten durch, und bezeichnet den freien Parameter $q_2(u)$ mit q findet man

ω	$Q(\{\omega\})$
uu	$\frac{q}{3}$
um	$\frac{1-2q}{3}$
ud	$\frac{q}{3}$
mu	$\frac{1}{6}$
md	$\frac{1}{6}$
du	$\frac{1}{21}$
dm	$\frac{2}{21}$
dd	$\frac{4}{21}$

Nach Konstruktion ist also jedes derartige Q ein Martingalmaß, d.h. alle Wahrscheinlichkeitsmaße von dieser Form bilden die Menge \mathcal{M} . Damit es sich um Wahrscheinlichkeitsmaße handelt, muss offenbar $0 \leq q \leq \frac{1}{2}$ gelten. Damit jedes der 8 Elementarereignisse unter Q eine echt positive Wahrscheinlichkeit hat, und somit ein \mathbb{P} -äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß ist, muss sogar gelten $0 < q < \frac{1}{2}$. Diese Maße bilden die Menge \mathcal{M}^* .

- b) Wir notieren die Auszahlungen der Option in einer gemeinsamen Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten, dass sie realisiert werden.

ω	$(S_2^{(1)}(\omega) - S_2^{(2)}(\omega))^+$	$(9 - S_2^{(2)}(\omega))^+$	$Q(\{\omega\})$
uu	3	0	$\frac{q}{3}$
um	2	0	$\frac{1-2q}{3}$
ud	1	1	$\frac{q}{3}$
mu	1	0	$\frac{1}{6}$
md	1	0	$\frac{1}{6}$
du	7	4	$\frac{1}{21}$
dm	0	0	$\frac{2}{21}$
dd	0	0	$\frac{4}{21}$

Damit ergibt sich für die Preise in Abhängigkeit von q

$$\pi_0(H_1) = 3 \cdot \frac{q}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1-2q}{3}\right) + \frac{q}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 7 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{3}$$

und

$$\pi_0(H_2) = \frac{q}{3} + 4 \cdot \frac{1}{21} = \frac{4}{21} + \frac{q}{3}.$$

Wir stellen fest, dass der Preis von H_1 unabhängig von q ist, und somit gilt $\pi_-(H_1) = \pi_+(H_1) = \frac{4}{3}$. Ferner erhalten wir

$$\pi_-(H_2) = \inf_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q[H_2] = \inf_{q \in (0, \frac{1}{2})} \frac{4}{21} + \frac{q}{3} = \frac{4}{21}$$

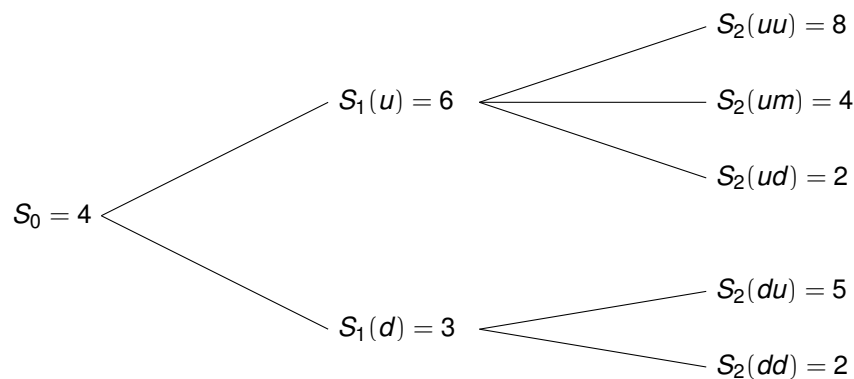
und

$$\pi_+(H_2) = \sup_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q[H_2] = \sup_{q \in (0, \frac{1}{2})} \frac{4}{21} + \frac{q}{3} = \frac{8}{42} + \frac{7}{42} = \frac{15}{42}.$$

Da nur der Preis von H_1 eindeutig bestimmt ist, ist nur dieser Zahlungsanspruch erreichbar.

Aufgabe 2 (Unvollständigkeit und Erreichbarkeit)

Betrachten Sie einen zweiperiodigen endlichen Finanzmarkt mit einem normierten risikolosen Wertpapier mit Zinssatz $r = 0.25$ und einer risikobehafteten Anlage S , die sich wie folgt entwickeln kann:



- Ist der Markt arbitragefrei?
- Ist der Preis einer europäischen Call-Option mit Basispreis $K = 3$ eindeutig bestimmt? Falls ja, geben Sie den Preis an und andernfalls ein Preisintervall. Ist der Zahlungsanspruch erreichbar?
- Geben Sie einen nichtdeterministischen Zahlungsanspruch an, dessen Preis unter allen äquivalenten Martingalmaßen gleich ist.

Lösungsvorschlag:

- Wir bestimmen die Menge \mathcal{M}^* der äquivalenten Martingalmaße.

- Für $t = 1$ muss im oberen Teilbaum gelten:

$$\frac{6}{1.25} = \frac{S_1(u)}{B_1} = \mathbb{E}_Q \left[\frac{S_2}{B_2} \middle| \mathcal{F}_1 \right] (u) = \frac{1}{1.25^2} (8q(u|u) + 4q(m|u) + 2q(d|u))$$

$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} = 8q(u|u) + 4q(m|u) + 2q(d|u)$$

Setze $p := q(u|u)$. Durch Subtraktion des Zweifachen der Gleichung $1 = q(u|u) + q(m|u) + q(d|u)$ ergibt sich

$$q(m|u) = \frac{11 - 6p}{2} = \frac{11}{4} - 3p \quad \text{und} \quad q(d|u) = 1 - p - \frac{11}{4} + 3p = -\frac{7}{4} + 2p$$

Da $q(\cdot|u) \in (0, 1)$ erhält man schließlich

$$(q(u|u), q(m|u), q(d|u)) \in \left\{ \left(p, \frac{11}{4} - 3p, -\frac{7}{4} + 2p \right) : p \in \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12} \right) \right\}.$$

- Für $t = 1$ ist der untere Teilbaum ein einperiodiges CRR-Modell und mithin ist

$$q(u|d) = \frac{1+r - \frac{S_2(dd)}{S_1(d)}}{\frac{S_2(du)}{S_1(d)} - \frac{S_2(dd)}{S_1(d)}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = \frac{7}{12}.$$

- Analog folgt für $t = 0$

$$q = \frac{1+r - \frac{S_1(d)}{S_0}}{\frac{S_1(u)}{S_0} - \frac{S_1(d)}{S_0}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{3}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Insgesamt erhält man

$$\mathcal{M}^* = \left\{ \left(\frac{2}{3}p, \frac{11}{6} - 2p, -\frac{7}{6} + \frac{4}{3}p, \frac{7}{36}, \frac{5}{36} \right) : p \in \left(\frac{7}{8}, \frac{11}{12} \right) \right\}$$

Insbesondere ist $\mathcal{M}^* \neq \emptyset$ und der Markt nach dem Ersten Hauptsatz der Preistheorie arbitragefrei.

- b) Sei $H := (S_2 - 3)^+$. Es gilt

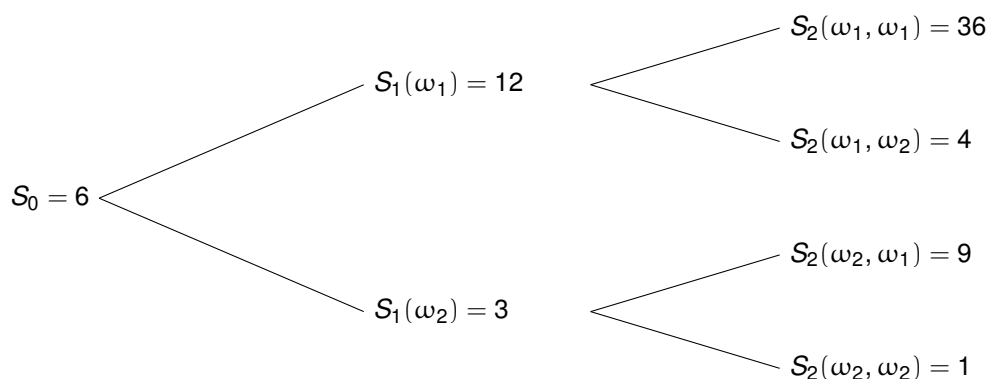
$$\begin{aligned} \pi_+(H) &= \sup_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q \left[\frac{H}{B_2} \right] = \frac{16}{25} \sup_{p \in (\frac{7}{8}, \frac{11}{12})} \left(\frac{10}{3}p + \frac{11}{6} - 2p + \frac{14}{36} \right) \\ &= \frac{16}{25} \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{11}{12} + \frac{11}{6} - 2 \cdot \frac{11}{12} + \frac{14}{36} \right) = \frac{496}{225} \approx 2.20. \\ \pi_-(H) &= \inf_{Q \in \mathcal{M}^*} \mathbb{E}_Q \left[\frac{H}{B_2} \right] = \frac{16}{25} \inf_{p \in (\frac{7}{8}, \frac{11}{12})} \left(\frac{10}{3}p + \frac{11}{6} - 2p + \frac{14}{36} \right) \\ &= \frac{16}{25} \cdot \left(\frac{10}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{11}{6} - 2 \cdot \frac{7}{8} + \frac{14}{36} \right) = \frac{488}{225} \approx 2.17. \end{aligned}$$

Der Preis ist nicht eindeutig bestimmt, sondern liegt im Intervall $(\pi_-(H), \pi_+(H))$. Der Zahlungsanspruch ist folglich nicht erreichbar.

- c) Unabhängigkeit des Preises von der Wahl des äquivalenten Martingalmaßes ist äquivalent zur Erreichbarkeit. Wähle also zum Beispiel $H = S_2$.

Aufgabe 3 (Amerikanischer Put)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Finanzmarkt mit einer Aktie und einem risikolosen Wertpapier. Dessen Kursverlauf sei gegeben durch $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{5}{4}$ und $B_2 = \frac{15}{8}$. Die möglichen Kursentwicklungen der Aktie seien durch das folgende Baumdiagramm beschrieben.



- Geben Sie die Menge \mathcal{M}^* aller äquivalenten Martingalmaße auf dem Grundraum $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\} \times \{\omega_1, \omega_2\}$ an und untersuchen Sie den Finanzmarkt auf Arbitragefreiheit und auf Vollständigkeit.
- Bestimmen Sie den fairen Preis zur Zeit $t = 0$ für eine amerikanische Put-Option mit Ausübungspreis $K = 8$.
- Geben Sie die optimale Ausübungsstrategie für diese amerikanische Put-Option an.

Lösungsvorschlag:

- a) Zunächst stellen wir fest, dass es sich bei dem gegebenen Finanzmarktmodell um ein CRR-Modell mit zeitabhängigen Parametern r_t, u_t, d_t handelt. Diese sind:

$$r_1 = \frac{B_1}{B_0} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4},$$

$$r_2 = \frac{B_2}{B_1} - 1 = \frac{15 \cdot 4}{8 \cdot 5} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = \frac{S_1(\omega_1)}{S_0} = \frac{12}{6} = 2$$

$$d_1 = \frac{S_1(\omega_2)}{S_0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{S_2(\omega_1, \omega_1)}{S_1(\omega_1)} = \frac{S_2((\omega_2, \omega_1))}{S_2(\omega_2)} = 3$$

$$d_2 = \frac{S_2(\omega_1, \omega_2)}{S_1(\omega_1)} = \frac{S_2((\omega_2, \omega_2))}{S_2(\omega_2)} = \frac{1}{3}$$

Der Markt ist demnach arbitragefrei und vollständig, denn es gilt $d_1 < 1 + r_1 < u_1$ und $d_2 < 1 + r_2 < u_2$. Es gilt weiterhin

$$q_1(\omega_1) = \frac{1 + r_1 - d_1}{u_1 - d_1} = \frac{1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$q_1(\omega_2) = 1 - q_1(\omega_1) = \frac{1}{2}$$

$$q_2(\omega_1 | \cdot) = \frac{1 + r_2 - d_2}{u_2 - d_2} = \frac{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{7}{16}$$

$$q_2(\omega_2 | \cdot) = 1 - q_2(\omega_1 | \cdot) = \frac{9}{16},$$

Wir erhalten das eindeutige äquivalente Martingalmaß nun als

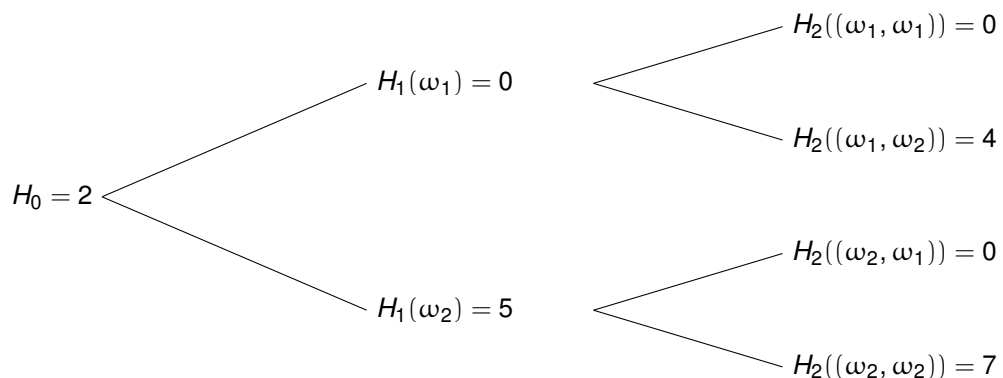
$$Q((\omega_1, \omega_1)) = q_1(\omega_1) \cdot q_2(\omega_1 | \omega_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{32}$$

$$Q((\omega_1, \omega_2)) = q_1(\omega_1) \cdot q_2(\omega_2 | \omega_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{32}$$

$$Q((\omega_2, \omega_1)) = q_1(\omega_2) \cdot q_2(\omega_1 | \omega_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{16} = \frac{7}{32}$$

$$Q((\omega_2, \omega_2)) = q_1(\omega_2) \cdot q_2(\omega_2 | \omega_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{32}$$

- b) Um den fairen Preis der amerikanischen Put Option zu bestimmen, berechnen wir die Snell-Einhüllende $(Z_t)_{t=0,1,2}$ zu $(\frac{H_t}{B_t})_{t=0,1,2}$ wobei $H_t = (8 - S_t)^+$ die Auszahlung der Option zum Zeitpunkt t ist.



Wir berechnen die Snell-Einhüllende durch Rückwärtsrekursion und starten bei $t = 2$, also mit $Z_2 = \frac{H_2}{B_2}$ und erhalten:

$$Z_2(\omega_1, \omega_1) = 0, \quad Z_2(\omega_1, \omega_2) = \frac{4}{\frac{15}{8}} = \frac{32}{15}, \quad Z_2(\omega_2, \omega_1) = 0, \quad Z_2(\omega_2, \omega_2) = \frac{7}{\frac{15}{8}} = \frac{56}{15}.$$

Für $t = 1$ erhält man:

$$Z_1(\omega_1) = \max \left\{ \frac{H_1(\omega_1)}{B_1}; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 | \mathcal{F}_1](\omega_1) \right\} = \max \left\{ 0; \frac{32}{15} \cdot \frac{9}{16} \right\} = \frac{6}{5}$$

und

$$Z_1(\omega_2) = \max \left\{ \frac{H_1(\omega_2)}{B_1}; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2 | \mathcal{F}_1](\omega_2) \right\} = \max \left\{ 4; \frac{56}{15} \cdot \frac{9}{16} \right\} = 4.$$

Abschließend berechnen wir für $t = 0$:

$$Z_0 = \max \left\{ \frac{H_0}{B_0}; \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_1 | \mathcal{F}_0] \right\} = \max \left\{ 2; \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \right\} = \frac{13}{5}.$$

Der faire Preis zum Zeitpunkt $t = 0$ der gegebenen amerikanischen Option lautet also $\pi(H) = Z_0 = \frac{13}{5}$.

- c) Die optimale Ausübungsstrategie ist nach Theorem 8.5 gegeben durch $\tau^*(\omega) = \inf \left\{ t \geq 0 : Z_t = \frac{H_t(\omega)}{B_t} \right\}$, also

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega = (\omega_2, \omega_1), (\omega_2, \omega_2), \\ 2, & \omega = (\omega_1, \omega_1), (\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Aufgabe 4 (Amerikanischer Collar)

Der kleine Sebastian war dieses Jahr sehr artig und wünscht sich daher vom Weihnachtsmann eine amerikanische Collar-Option mit der Auszahlung

$$H_t = \min\{\max\{S_t, K_1\}, K_2\}, \quad t = 0, 1, 2,$$

wobei $K_1 = 1$ und $K_2 = 2$. Betrachten Sie ein zweiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 1$ und $r = \frac{1}{2}$.

- Wie viel Geld muss der Weihnachtsmann für die amerikanische Option H zur Zeit $t = 0$ bezahlen, wenn er diesen Wunsch erfüllen möchte?
- Was ist die optimale Ausübungsstrategie, die der kleine Sebastian anwenden sollte?

Lösungsvorschlag:

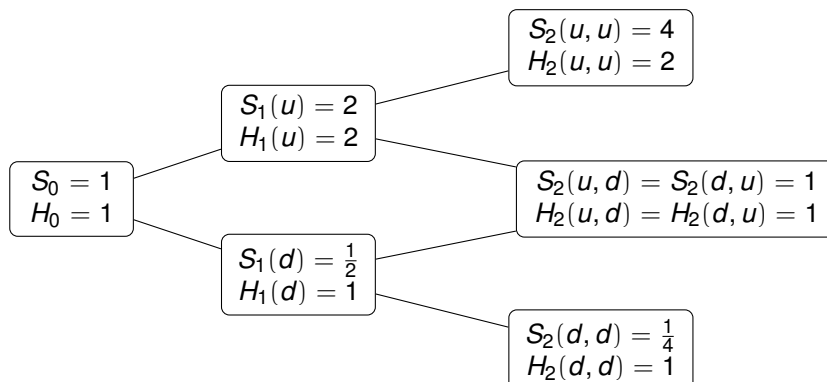
Es sei $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\}$. Das gegebene CRR-Modell ist arbitragefrei und vollständig, da $d < 1 + r < u$. Das äquivalente Martingalmaß \mathbb{Q} ist durch den Parameter

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{2}{3}$$

eindeutig festgelegt. Die risikolose Anlage B folgt dem deterministischen Verlauf

$$B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{3}{2}, \quad B_2 = \frac{9}{4}.$$

Die möglichen Entwicklungen des risikobehafteten Wertpapiers S und die zugehörige Auszahlung amerikanischer Option sind im folgenden Baumdiagramm dargestellt:



a) Wir bestimmen zunächst die Snell-Einhüllende $Z = (Z_t)_{t=0,1,2}$ von $(H_t B_t^{-1})_{t=0,1,2}$, d.h.

$$Z_2 := \frac{H_2}{B_2}$$

$$Z_t := \max \left\{ \frac{H_t}{B_t}, \mathbb{E}_Q[Z_{t+1} | \mathcal{F}_t] \right\}, \quad t = 0, 1.$$

Also

$$Z_2(u, u) = \frac{8}{9}, \quad Z_2(u, d) = Z_2(d, u) = \frac{4}{9}, \quad Z_2(d, d) = \frac{4}{9},$$

$$Z_1(u) = \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right\} = \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{20}{27} \right\} = \frac{4}{3},$$

$$Z_1(d) = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \right\} = \max \left\{ \frac{2}{3}, \frac{4}{9} \right\} = \frac{2}{3},$$

$$Z_0 = \max \left\{ 1, \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right\} = \max \left\{ 1, \frac{10}{9} \right\} = \frac{10}{9}.$$

Nach der Vorlesung ist $\pi_0^A(H) = Z_0 = \frac{10}{9}$ der faire Preis der Option zum Zeitpunkt $t = 0$.

b) Für den optimalen Ausübungszeitpunkt τ^* gilt

$$\tau^* = \min\{t \geq 0 : Z_t = H_t B_t^{-1}\},$$

d.h.

$$\tau^*(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Alternativer Lösungsweg: Der Preis kann auch mit dem Preis-Algorithmus aus der Vorlesung bestimmt werden. Es gilt

$$H_t = h(S_t) \quad \text{mit} \quad h(s) = \min\{\max\{s, 1\}, 2\} \quad \text{für } t = 0, 1, 2,$$

d. h.

$$H_0 = h(S_0) = h(1) = 1,$$

$$H_1(u) = h(S_1(u)) = h(2) = 2,$$

$$H_1(d) = h(S_1(d)) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$H_2(u, u) = h(S_2(u, u)) = h(2) = 2,$$

$$H_2(u, d) = h(S_2(u, d)) = h(1) = 1,$$

$$H_2(d, u) = h(S_2(d, u)) = h(1) = 1,$$

$$H_2(d, d) = h(S_2(d, d)) = h\left(\frac{1}{4}\right) = 1.$$

Der Preis einer amerikanischen Option $\pi_0^A(H)$ im CRR-Modell berechnet sich nach folgendem Algorithmus:

$$p_T(S_T) = h(S_T)$$

$$\vdots$$

$$p_t(S_t) = \max \left\{ h(S_t), \frac{1}{1+r} (q p_{t+1}(S_t u) + (1-q) p_{t+1}(S_t d)) \right\}$$

$$\vdots$$

$$p_0(S_0) = \max \left\{ h(S_0), \frac{1}{1+r} (q p_1(S_0 u) + (1-q) p_1(S_0 d)) \right\} = \pi_0^A(H).$$

Für das gegebene Modell erhalten wir

$$p_2(S_2(u, u)) = p_2(4) = h(4) = 2,$$

$$p_2(S_2(u, d)) = p_2(S_2(d, u)) = p_2(1) = h(1) = 1,$$

$$p_2(S_2(d, d)) = p_2(\frac{1}{4}) = h(\frac{1}{4}) = 1,$$

$$p_1(S_1(u)) = p_1(2) = \max \left\{ h(2), \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} p_2(4) + \frac{1}{3} p_2(1) \right) \right\} = \max \left\{ 2, \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right\} = 2,$$

$$p_1(S_1(d)) = p_1(\frac{1}{2}) = \max \left\{ h(\frac{1}{2}), \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} p_2(1) + \frac{1}{3} p_2(\frac{1}{4}) \right) \right\} = \max \left\{ 1, \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right\} = 1,$$

$$p_0(S_0) = p_0(1) = \max \left\{ h(1), \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} p_2(2) + \frac{1}{3} p_2(\frac{1}{2}) \right) \right\} = \max \left\{ 1, \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right\} = \frac{10}{9}.$$

Der optimale Ausübungszeitpunkt ist $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : p_t(S_t) = H_t\} = 1$.



*Frohe Weihnachten und einen
guten Rutsch!*