Lösungsblatt 8

Aufgabe 1 (Amerikanische Barriereoption)

Betrachten Sie ein dreiperiodiges CRR-Modell mit Parametern $S_0 = 1$, $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $r = 0$ und darin die Amerikanische Up-and-Out-Call-Option $H = (H_n)_{n=0,1,2,3}$ mit Auszahlung

$$H_n = \begin{cases} (S_n - K)^+, & S_k \leqslant 3 \text{ für alle } k \leqslant n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie den Preis von H zur Zeit 0 für $K = \frac{1}{3}$.

b) Bestimmen Sie die optimale Ausübungsstrategie.

Lösungsvorschlag:

a) Die Auszahlung der Barriereoption ist pfadabhängig, sodass alle Trajektorien betrachtet werden müssen. In den folgenden Tabellen tragen wir die Werte der Aktie und die zugehörigen Werte der Option für alle $\omega \in \Omega$ ein.

ω	$\exists t : S_t(\omega) \geqslant 3$	$S_3(\omega)$	$H_3(\omega)$	$S_2(\omega)$	$H_2(\omega)$	$S_1(\omega)$	$H_1(\omega)$	$S_0(\omega)$	$H_0(\omega)$
uuu	ja	8	0	4	0	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
uud	ja	2	0	4	0	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
udu	nein	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
udd	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
duu	nein	2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
dud	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
ddu	nein	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$
ddd	nein	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1	$\frac{2}{3}$

Da keine Diskontierung notwendig ist gilt $Z_3(\omega) = H_3(\omega)$, wobei Z die Snell-Einhüllende bezeichnet. Es gelten also in $t = 2$

$$Z_2(uu) = \max\{0, \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0\} = \max\{0, 0\} = 0,$$

$$Z_2(ud) = Z_2(du) = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6}\} = \max\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3}$$

und

$$Z_2(dd) = \max\{0, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot 0\} = \frac{1}{18}.$$

Damit erhalten wir für $t = 1$

$$Z_1(u) = \max\{\frac{5}{3}, \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\} = \frac{5}{3}$$

und

$$Z_1(d) = \max\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18}\} = \frac{7}{27}.$$

Schlussendlich folgt für $t = 0$

$$Z_0 = \max\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{27}\} = \frac{59}{81}.$$

b) Es ist $\tau^* = \inf\{t \geqslant 0 : Z_t = H_t\}$. Nach Teilaufgabe a) gilt also

$$\tau^*(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{uuu, uud, udu, udd\}, \\ 2, & \omega \in \{duu, dud\}, \\ 3, & \omega \in \{ddu, ddd\}. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (Amerikanische Option in Abhängigkeit eines Parameters)

Gegeben sei ein zweiperiodiger Cox-Ross-Rubinstein-Finanzmarkt mit den Parametern $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$ und $r = \frac{1}{2}$ sowie ein risikoloses Wertpapier B mit $B_0 = 1$ und eine Aktie mit dem Startwert $S_0 = 1$. Weiter sei für $y > 0$ eine amerikanische Option mit dem folgenden Auszahlungsprofil (H_t) gegeben:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & H_2(uu) = 60 \\ & H_1(u) = y \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\ H_0 = 10 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & H_2(ud) = 15 \\ & H_1(d) = 5 \arrow[r, dash] \arrow[dr, dash] & H_2(du) = 9 \\ & & H_2(dd) = 4 \end{tikzcd}$$

a) Bestimmen Sie den fairen Preis in Abhängigkeit von y zur Zeit $t = 0$ so explizit wie möglich.

b) Welche Bedingungen müssen an y gestellt werden, dass der faire Preis der amerikanischen Option (H_t) zur Zeit $t = 0$ gerade $Z_0 = \frac{130}{9}$ beträgt?

Lösungsvorschlag:

a) In dem betrachteten Finanzmarkt gilt:

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{2}{3}$$

und

$$B_1 = \frac{3}{2},\ B_2 = \frac{9}{4}.$$

Nach Theorem 8.5 ist der faire Preis $\pi^A(H)$ einer amerikanischen Option H zur Zeit $t = 0$ durch den Wert $\pi^A(H) = Z_0$ gegeben, wobei $(Z_t)_{t=0,1,2}$ die Snell-Einhüllende zum Prozess $\left(\frac{H_t}{B_t}\right)_{t=0,1,2}$ ist. Nach Definition der Snell-Einhüllenden können wir diese durch Rückwärtsrekursion bestimmen:

$$Z_2 = \frac{H_2}{B_2},$$

also

$$Z_2(uu) = \frac{80}{3}, \quad Z_2(ud) = \frac{20}{3}, \quad Z_2(du) = 4, \quad Z_2(dd) = \frac{16}{9}.$$

Damit lassen sich $Z_1(u)$ sowie $Z_1(d)$ berechnen. Es gilt:

$$Z_1(u) = \max\left\{\frac{H_1(u)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](u)\right\} = \max\left\{\frac{2}{3} \cdot y, \frac{2}{3} \cdot \frac{80}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{20}{3}\right\} = \max\left\{\frac{2}{3} \cdot y, 20\right\},$$

sowie

$$Z_1(d) = \max\left\{\frac{H_1(d)}{B_1}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_2|\mathcal{F}_1](d)\right\} = \max\left\{\frac{2}{3} \cdot 5, \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{9}\right\} = \max\left\{\frac{10}{3}, \frac{88}{27}\right\} = \frac{10}{3}.$$

Damit ergibt sich weiter:

$$Z_0 = \max\left\{\frac{H_0}{B_0}, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z_1|\mathcal{F}_0]\right\} = \max\left\{10, \frac{2}{3} \cdot Z_1(u) + \frac{1}{3} \cdot Z_1(d)\right\} = \max\left\{10, \frac{2}{3} \cdot \max\left\{\frac{2}{3} \cdot y, 20\right\} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{3}\right\}.$$

Um nun $\pi^A(H)$ möglichst explizit anzugeben, lösen wir noch die beiden Maxima in entsprechende Bedingungen an y auf.

$$\max\left\{\frac{2}{3}y, 20\right\} = \begin{cases} \frac{2}{3}y, & y > 30 \\ 20, & y \leqslant 30 \end{cases}$$

Damit erhalten wir für $y \leqslant 30$:

$$\pi^A(H) = Z_0 = \max\left\{10, \frac{2}{3}\cdot 20 + \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3}\right\} = \max\left\{10, \frac{130}{9}\right\} = \frac{130}{9}.$$

Für $y > 30$ erhalten wir:

$$\pi^A(H) = Z_0 = \max\left\{10, \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}y + \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3}\right\} = \max\left\{10, \frac{4}{9}y + \frac{10}{9}\right\} = \frac{4}{9}y + \frac{10}{9}.$$

b) Es soll gelten:

$$\pi^A(H) = Z_0 = \max\left\{10, \frac{2}{3}\max\left\{\frac{2}{3}y, 20\right\} + \frac{1}{3}\cdot\frac{10}{3}\right\} \stackrel{!}{=} \frac{130}{9}.$$

Aus Teil a) wissen wir bereits, dass dies für $y \leqslant 30$ erfüllt ist. Da die Funktion $y \mapsto \frac{4}{9}y + \frac{10}{9}$ für $y = 30$ den Wert $\frac{130}{9}$ annimmt und streng monoton wachsend ist folgt

$$\pi^A(H) > \frac{130}{9} \text{ für } y > 30.$$

Somit muss also $y \in (0, 30]$ gewählt werden.

Aufgabe 3 (Amerikanischer Collar - Fortsetzung)

Gegeben sei wie in Aufgabe 4 von Blatt 7 ein zweiperiodiges Cox-Ross-Rubinstein-Modell mit $u = 2$, $d = \frac{1}{2}$, $S_0 = 1$ und $r = \frac{1}{2}$. Wir betrachten eine amerikanische Collar-Option mit der Auszahlung

$$H_t = \min\{\max\{S_t, K_1\}, K_2\}, \quad t = 0, 1, 2,$$

wobei $K_1 = 1$ und $K_2 = 2$. Bestimmen Sie eine Hedging-Strategie der Option bis zur Ausübung.

Lösungsvorschlag:

Es sei $\Omega = \{u, d\} \times \{u, d\}$. Nach der Vorlesung existiert eine selbstfinanzierende Handelsstrategie φ, so dass $V_t^\varphi = B_t Z_t$ für $t \leqslant \tau^\star$. Es gilt $B_t Z_t \geqslant H_t$ für alle t nach Definition der Snell-Einhüllenden (Z_t) von $(H_t B_t^{-1})$ und $B_{\tau^\star} Z_{\tau^\star} = H_{\tau^\star}$ nach Theorem 8.5. Es gilt $\tau^\star = 1$, vgl. Aufgabe 1. Wir suchen also (α_0, β_0), sodass folgende Beziehung erfüllt ist:

$$\alpha_0 S_1 + \beta_0 B_1 = V_1^\varphi = B_1 Z_1,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \alpha_0 S_1(u) + \beta_0 B_1 = B_1 Z_1(u) \quad &\iff \quad 2\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2, \\ \alpha_0 S_1(d) + \beta_0 B_1 = B_1 Z_1(d) \quad &\iff \quad \frac{1}{2}\alpha_0 + \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten liefert

$$\frac{3}{2}\alpha_0 = 1 \quad \iff \quad \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\beta_0 = 1 \quad \iff \quad \frac{3}{2}\beta_0 = \frac{2}{3} \quad \iff \quad \beta_0 = \frac{4}{9}.$$

Also ist die optimale Hedging-Strategie bis zur Ausübung

$$\varphi = (\alpha_0, \beta_0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right).$$

Programmieraufgabe (Hedging Amerikanischer Optionen im CRR-Modell)

Wir betrachten einen T-periodigen CRR-Markt mit vom Benutzer wählbaren Parametern $d, u, r, B_0, S_0 > 0$ und $T \in \{1, \dots, 10\}$, in dem wir verschiedene Amerikanische Optionen hedgen und bewerten möchten:

$$H_t = (K - S_t)^+ \qquad \text{(Amerikanischer Put)}$$
$$H_t = (\max\{S_t, B_t\} - K)^+ \qquad \text{(Amerikanischer Auswahl-Call)}$$
$$H_t = \mathbb{1}_{S_t > K} \qquad \text{(Amerikanische Digitaloption)}$$

Erstellen Sie in einer Programmier- oder Skriptsprache Ihrer Wahl ein Programm, das Folgendes leistet:

- Abfrage aller Parameter vom Benutzer und Prüfung auf Zulässigkeit
- Auswahl der gewünschten Option H durch den Benutzer inklusive Abfrage des Ausübungspreises K
- Berechnung und Ausgabe der optimalen Ausübungsstrategie und des Optionspreises zur Zeit $t = 0$
- Berechnung und Ausgabe der zugehörigen Hedgingstrategie

Die Aufgabe wird in der Übung am 07.01.2025 anhand eines in *R* realisierten Lösungsvorschlags besprochen.

Lösungsvorschlag:
Siehe R-Datei im Ilias-Ordner.