Prof. Dr. Nicole Bäuerle
Sebastian Höfer, M.Sc.

Lösungsblatt 9

Aufgabe 1 (Lexikographische Ordnung)

Auf dem zweidimensionalen Einheitsquadrat $\chi := [0,1] \times [0,1]$ ist die lexikographische Ordnung wie folgt definiert: Für beliebige $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \chi$ ist $x \succ y$ genau dann wenn $x_1 > y_1 \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 > y_2)$. Zeigen Sie, dass diese Ordnung keine numerische Repräsentation besitzt, d.h. dass keine Funktion $U : \chi \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$U(x) > U(y) \quad \iff \quad x \succ y.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Differenzen $U(z,1) - U(z,0)$, $z \in [0,1]$.

Lösungsvorschlag:
Angenommen, es existiert eine numerische Darstellung $U : \chi \to \mathbb{R}$ der lexikographischen Ordnung $\succ$ auf $\chi := [0,1] \times [0,1]$. Dann gilt für alle $z \in [0,1]$

$$d(z) := U(z,1) - U(z,0) > 0$$

Daher lässt sich das Einheitsintervall als Zerlegung

$$[0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$$

darstellen, wobei

$$Z_n := \left\{ z \in [0,1] : d(z) > \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Da $[0,1]$ überabzählbar ist, muss mindestens eine der abzählbar vielen vereinigten Mengen ebenfalls überabzählbar sein, etwa die Menge Z_{n_0}. Wähle darin $N \geqslant 2$ feste Elemente $z_1 < \cdots < z_N$. Die Eigenschaften der Lexikographie nutzend gilt also für alle $i \in \{1, \ldots, N-1\}$

$$(z_{i+1}, 0) \succ (z_i, 1),$$

$$U(z_{i+1}, 0) - U(z_i, 0) > U(z_i, 1) - U(z_i, 0) = d(z_i) > \frac{1}{n_0}.$$

Daraus folgern wir, dass der Abstand der Ecken von χ keine untere Schranke einhält:

$$U(1,1) - U(0,0) = \underbrace{U(1,1) - U(z_N, 0)}_{>0} + \sum_{i=1}^{N-1} \underbrace{(U(z_{i+1}, 0) - U(z_i, 0))}_{>\frac{1}{n_0}} + \underbrace{U(z_1, 0) - U(0,0)}_{\geqslant 0} > \frac{N-1}{n_0}.$$

Da wir in Z_{n_0} beliebig viele aufsteigend angeordnete Elemente wählen können, wächst $U(1,1) - U(0,0) \to \infty$ $(N \to \infty)$, im Widerspruch zur Wohldefiniertheit der Repräsentation U.

Aufgabe 2 (Sicherheitsäquivalent)

Bestimmen Sie das Sicherheitsäquivalent einer Normalverteilung mit Erwartungswert $\nu \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma > 0$ unter einer exponentiellen Nutzenfunktion $U(x) = -e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$.

Lösungsvorschlag:
Sei $\mu := \mathcal{N}(\nu, \sigma^2) \in \mathcal{P}$ die hier betrachtete Lotterie und $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $U(x) := -e^{-\gamma x}$, $\gamma > 0$ die zugrunde liegende Nutzenfunktion. Nach Definition 9.5 ist das Sicherheitsäquivalent von μ eine (eindeutig bestimmte) reelle Zahl $c(\mu)$, sodass gilt:

$$U(c(\mu)) = \int U d\mu, \quad \text{bzw.} \quad c(\mu) = U^{-1}\left(\int U d\mu\right).$$

Wählt man sich eine Zufallsvariable X mit Verteilung μ, d.h. $X \sim \mu$, so gilt

$$\int U d\mu = \mathbb{E}[U(X)].$$

Damit kann das Sicherheitsäquivalent auch geschrieben werden als

$$c(\nu) = U^{-1}\left(\int U d\mu\right) = U^{-1}\Big(\mathbb{E}[U(X)]\Big).$$

Im Kontext dieser Aufgabe gilt $\mathbb{E}[U(X)] = -\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right]$, wobei $X \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma^2)$. Folglich erhalten wir

$$-\gamma X \sim \mathcal{N}(-\gamma\nu, \gamma^2\sigma^2)$$

und somit

$$e^{-\gamma X} \sim \mathcal{LN}(-\gamma\nu, \gamma^2\sigma^2).$$

Für eine logarithmisch normalverteilte Zufallsvariable $Z \sim \mathcal{LN}(a, b^2)$ gilt $\mathbb{E}[Z] = e^{a+\frac{b^2}{2}}$. Im Kontext dieser Aufgabe erhalten wir somit

$$\mathbb{E}[U(X)] = -\mathbb{E}\left[e^{-\gamma X}\right] = -e^{-\gamma\nu+\frac{\gamma^2\sigma^2}{2}}.$$

Um nun das Sicherheitsäquivalent zu erhalten, muss dieser Erwartungswert in die Umkehrfunktion U^{-1} von U eingesetzt werden. Es gilt hierbei

$$U^{-1} : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}, \quad U^{-1}(y) = -\frac{1}{\gamma}\ln(-y).$$

Wir erhalten damit schlussendlich

$$c(\mu) = U^{-1}\Big(\mathbb{E}[U(X)]\Big) = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(e^{-\gamma\nu+\frac{\gamma^2\sigma^2}{2}}\right) = \nu - \frac{\gamma\sigma^2}{2}.$$

Aufgabe 3 (HARA-Nutzenfunktionen)

Eine streng wachsende und streng konkave Nutzenfunktion $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ liegt in der Menge HARA, wenn die absolute Risikoaversion eine hyperbolische Funktion ist, d.h. falls

$$A(x) = \frac{1}{ax+b}, \quad a, b \geqslant 0, \ a+b > 0, \ x \in (0, \infty).$$

Charakterisieren Sie alle solchen Nutzenfunktionen.

Lösungsvorschlag:
Sei $U : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ in HARA. Dann ist U nach Definition streng wachsend und streng konkav und wir finden reelle Zahlen $a, b \geqslant 0$ mit $a + b > 0$ sowie

$$A(x) = -\frac{U''(x)}{U'(x)} = \frac{1}{ax+b}, \quad x \in (0, \infty). \tag{1}$$

Aus streng wachsend folgt $U' > 0$, aus streng konkav $U'' < 0$, also $ax + b > 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Das erklärt die Nebenbedingungen an a und b und wird im Folgenden weitere Anforderungen an freie Parameter implizieren.

Setze $y(x) := U'(x)$ und $h(x) := -\frac{1}{ax+b}$. Dann ist (1) gleichbedeutend mit der Richtigkeit der homogenen, linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = h(x)y(x), \quad x \in (0, \infty). \tag{2}$$

Deren allgemeine Lösung ist von der Form

$$y(x) = ce^{H(x)}, \quad x \in (0, \infty),$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ und H eine Stammfunktion von h ist (siehe Analysis II). Wir unterscheiden verschiedene Parameter.

- Ist $a = 0$ (und damit $b > 0$), ist $h(x) \equiv -\frac{1}{b}$ und y von der Form $y(x) = c\exp(-\frac{1}{b}x)$, $x \in (0, \infty)$ für ein $c > 0$. Wegen $U(x) = \int_0^x y(t)dt + C$, $C \in \mathbb{R}$, finden wir $U(x) = -bc\exp(-\frac{1}{b}x) + C$.
- Für $a \neq 0$ gilt $y(x) = c\exp(H(x))$, $x \in (0, \infty)$, wobei $H(x) = \int_0^x h(t)dt = -\frac{1}{a}\log(ax + b)$ die Stammfunktion ohne Integrationskonstante ist. Letztere wird durch die Wahl von $c > 0$ abgedeckt. Entsprechend finden wir $y(x) = c(ax + b)^{-\frac{1}{a}}$ und müssen beim Suchen einer Stammfunktion zwei Fälle unterscheiden:
  - $a = 1$. Dann ist schlicht $y(x) = \frac{c}{x+b}$ und die Stammfunktionen sind $U(x) = c\log(x + b) + C$, $C \in \mathbb{R}$.
  - $a \neq 1$. Polynomielles Integrieren liefert $U(x) = \frac{c}{a(1-\frac{1}{a})}(ax + b)^{1-\frac{1}{a}} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Insgesamt haben wir

$$U(x) = C + \begin{cases} -bc\exp\left(-\frac{1}{b}x\right), & a = 0 \\ c\log(x + b), & a = 1 \\ \frac{c}{a(1-\frac{1}{a})}(ax + b)^{1-\frac{1}{a}}, & a \in (0, \infty) \setminus \{1\} \end{cases} \qquad c > 0,\ C \in \mathbb{R},\ x \in (0, \infty).$$

Insbesondere sind der exponentielle, logarithmische und Power-Nutzen in HARA enthaltene Spezialfälle.

Aufgabe 4 (Stochastische Dominanz erster Ordnung bei Exponentialverteilungen)

Seien μ und ν Exponentialverteilungen mit Parametern $\lambda_\mu, \lambda_\nu > 0$. Zeigen Sie:

$$\mu \succeq_{\mathrm{FSD}} \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_\mu \leqslant \lambda_\nu.$$

Lösungsvorschlag:

Seien μ und ν Exponentialverteilungen mit Parametern $\lambda_\mu, \lambda_\nu > 0$. Um die gewünschte Äquivalenz

$$\mu \succeq_{\mathrm{FSD}} \nu \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_\mu \leqslant \lambda_\nu$$

zu zeigen, nutzen wir Theorem 9.11:

$$\mu \succeq_{\mathrm{FSD}} \nu \quad \Longleftrightarrow \quad F_\mu(x) \leqslant F_\nu(x)\ \forall x \in \mathbb{R},$$

wobei F_μ die Verteilungsfunktion von μ und F_ν die Verteilungsfunktion von ν darstellt. Im Fall der Exponentialverteilung bedeutet dies

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_\mu x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$
$$F_\nu(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_\nu x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Für $x < 0$ gilt $F_\mu(x) \leqslant F_\nu(x)$ trivialerweise. Sei also $x \geqslant 0$. Dann gilt

$$F_\mu(x) \leqslant F_\nu(x) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-\lambda_\mu x} \geqslant e^{-\lambda_\nu x} \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_\mu \leqslant \lambda_\nu.$$

Wir erhalten insgesamt

$$\mu \succeq_{\mathrm{FSD}} \nu \quad \Longleftrightarrow \lambda_\mu \leqslant \lambda_\nu.$$