Prof. Dr. Nicole Bäuerle
Sebastian Höfer, M.Sc.

Lösungsblatt 10

Aufgabe 1 (Stochastische Dominanz zweiter Ordnung und Laplace-Verteilung)

Es sei μ_b eine Laplace-Verteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Parameter $b > 0$, d.h. ihre Verteilungsfunktion ist gegeben durch

$$F_{\mu_b}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, e^{\frac{x}{b}}, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}\, e^{\frac{-x}{b}}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass für $b, b' > 0$ gilt: $\mu_b \succeq_{\mathrm{SSD}} \mu_{b'} \Leftrightarrow b \leqslant b'$.

b) Gilt die Aussage aus Teil b) auch für $\succeq_{\mathrm{FSD}}$ anstelle von $\succeq_{\mathrm{SSD}}$?

Lösungsvorschlag:

a) Wir verwenden die Charakterisierung der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung über Verteilungsfunktionen (siehe Theorem 9.13):

$$\mu_b \succeq_{\mathrm{SSD}} \mu_{b'} \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{c} F_{\mu_b}(x)dx \leqslant \int_{-\infty}^{c} F_{\mu_{b'}}(x)dx \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

Für $c < 0$ ist das äquivalent zu:

$$\int_{-\infty}^{c} F_{\mu_b}(x)dx = \left[\frac{1}{2}be^{\frac{x}{b}}\right]_{-\infty}^{c} = \frac{1}{2}be^{\frac{c}{b}} \leqslant \frac{1}{2}b'e^{\frac{c}{b'}} = \int_{-\infty}^{c} F_{\mu_{b'}}(x)dx.$$

Dies ist wiederum äquivalent zu $b \leqslant b'$.

Für $c = 0$ erhalten wir:

$$\int_{-\infty}^{0} F_{\mu_b}(x)dx = \left[\frac{1}{2}be^{\frac{x}{b}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}b \leqslant \frac{1}{2}b' = \int_{-\infty}^{0} F_{\mu_{b'}}(x)dx$$

und argumentieren analog zum ersten Fall.

Für $c > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{c} F_{\mu_b}(x)dx &= \int_{-\infty}^{0} F_{\mu_b}(x)dx + \int_{0}^{c} F_{\mu_b}(x)dx = \frac{1}{2}b + \left[x + \frac{1}{2}be^{\frac{-x}{b}}\right]_{0}^{c} = c + \frac{1}{2}be^{\frac{-c}{b}} \\ &\leqslant c + \frac{1}{2}b'e^{\frac{-c}{b'}} = \int_{-\infty}^{c} F_{\mu_{b'}}(x)dx\end{aligned}$$

und argumentieren wieder analog.

b) Nein, die Aussage gilt nicht für stochastische Dominanz erster Ordnung, denn für $x > 0$ und $b < b'$ gilt

$$F_{\mu_b}(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{b}} > 1 - \frac{1}{2}e^{\frac{-x}{b'}} = F_{\mu_{b'}}(x),$$

doch statt $>$ müsste hier $\leqslant$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten, damit $\mu_b \succeq_{\mathrm{FSD}} \mu_{b'}$ folgt, siehe Theorem 9.11.

Aufgabe 2 (Stochastische Dominanz zweiter Ordnung und unabhängige Addition)

Es seien X_1 und X_2 zwei Zufallsvariablen und Y eine weitere von X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariable. Zeigen Sie:

$$X_1 \succeq_{\text{SSD}} X_2 \quad \Longrightarrow \quad X_1 + Y \succeq_{\text{SSD}} X_2 + Y.$$

Lösungsvorschlag:
Beachte: Für zwei Zufallsvariablen X_1, X_2 gilt genau dann $X_1 \succeq_{\text{SSD}} X_2$, wenn $\mu \succeq_{\text{SSD}} \nu$ für die zugehörigen Verteilungen $\mu, \nu \in \mathscr{P}$ mit $X_1 \sim \mu$ und $X_2 \sim \nu$ gilt. Entsprechend kann die Definition für die stochastische Dominanz zweiter Ordnung auch für Zufallsvariablen umformuliert werden:

$$X_1 \succeq_{\text{SSD}} X_2 \Leftrightarrow \mathbb{E}[U(X_1)] \geqslant \mathbb{E}[U(X_2)] \quad \text{für alle Nutzenfunktionen } U.$$

Sei nun $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto U(x)$ eine beliebige Nutzenfunktion. Für ein festes $y \in \mathbb{R}$ ist dann auch die Verschiebung $x \mapsto U(x+y)$ eine Nutzenfunktion. Aus $X_1 \succeq_{\text{SSD}} X_2$ und der Unabhängigkeit von Y können wir

$$\mathbb{E}\left[U(X_1+Y)\middle|Y=y\right] = \mathbb{E}\left[U(X_1+y)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[U(X_2+y)\right] = \mathbb{E}\left[U(X_2+Y)\middle|Y=y\right] \quad \text{für } \mathbb{P}_Y\text{-fast alle } y \in \mathbb{R}$$

folgern. Es folgt mittels iterierter Erwartungswertbildung

$$\mathbb{E}\left[U(X_1+Y)\right] = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\left[U(X_1+Y)\middle|Y\right]\Big] \geqslant \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\left[U(X_2+Y)\middle|Y\right]\Big] = \mathbb{E}\left[U(X_2+Y),\right]$$

d.h. $X_1 + Y \succeq_{\text{SSD}} X_2 + Y$.

Aufgabe 3 (Stochastische Dominanz zweiter Ordnung und abhängige Addition)

Seien X_1 und X_2 Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung, aber nicht notwendigerweise unabhängig. Zeigen Sie

$$X_1 + X_2 \succeq_{\text{SSD}} 2X_1.$$

Lösungsvorschlag:
Es gilt

$$X_1 + X_2 \succeq_{\text{SSD}} 2X_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(X_1+X_2) \succeq_{\text{SSD}} X_1,$$

denn $U(\cdot)$ ist genau dann eine Nutzenfunktion, wenn $U(\frac{1}{2}\,\cdot)$ eine Nutzenfunktion ist. Es reicht daher aus, die Gültigkeit der rechten Seite zu überprüfen. Diese folgt auf Grund der Konkavität der Nutzenfunktion und der Monotonie des Erwartungswertes direkt aus der Definition der stochastischen Dominanz zweiter Ordnung:

$$\mathbb{E}\left[U\left(\frac{1}{2}(X_1+X_2)\right)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}U(X_1) + \frac{1}{2}U(X_2)\right] = \mathbb{E}\left[U(X_1)\right]$$

für alle Nutzenfunktionen U.

Aufgabe 4 (Martingalmethode)

Gegeben sei ein einperiodiger Trinomialmarkt mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{3}, i = 1,2,3$. Auf diesem Markt gibt es ein risikoloses Wertpapier B mit $B_0 = B_1 = 1$. Außerdem existieren zwei risikobehaftete Wertpapiere S^1, S^2 mit $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und

$$S_1^1(\omega_i) = \begin{cases} 2 & \text{für } i = 1, \\ 1 & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{2} & \text{für } i = 3, \end{cases} \qquad S_1^2(\omega_i) = \begin{cases} \frac{8}{3} & \text{für } i = 1, \\ \frac{8}{9} & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{3} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig ist.

b) Auf dem Finanzmarkt betrachten wir nun einen Investor, der über das Anfangskapital $x_0 > 0$ und die Nutzenfunktion

$$U(x) = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

verfügt. Der Investor möchten den Nutzen, welchen er aus seinem Endvermögen zieht, maximieren. Zeigen Sie mit Hilfe der Martingalmethode, dass das optimale Endvermögen $X^\star$ gegeben ist durch

$$X^\star(\omega_i) = \begin{cases} \frac{x_0}{\kappa_0}\sqrt{2} & \text{für } i = 1, \\ \frac{x_0}{\kappa_0}\sqrt{\frac{2}{3}} & \text{für } i = 2, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} & \text{für } i = 3, \end{cases} \quad \text{mit} \quad \kappa_0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3}.$$

Lösungsvorschlag:

a) Um den Markt auf Arbitragefreiheit und Vollständigkeit zu prüfen, bestimmen wir die Menge aller äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathscr{M}^\star$. Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q} \in \mathscr{M}^\star$ muss gelten

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[S_1^k \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[S_1^k] = S_0^k \quad \mathbb{Q}\text{-f.s.}, \quad k = 1,2,$$

da hier $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $B_0 = B_1 = 1$. Wir setzen $q_i := \mathbb{Q}(\{\omega_i\})$ für $i = 1,2,3$. Durch Einsetzen der gegebenen Werte von S_1^1 und S_1^2 und der Eigenschaft eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{Q}$, ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} & \frac{8}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Umstellen der ersten Gleichung nach q_3 liefert

$$q_3 = 1 - q_1 - q_2.$$

Durch Einsetzen von q_3 in die zweite Gleichung von (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2q_1 + q_2 + \frac{1}{2}(1 - q_1 - q_2) &= 1 \\ \iff \quad \frac{3}{2}q_1 + \frac{1}{2}q_2 &= \frac{1}{2} \\ \iff \quad q_1 + \frac{1}{3}q_2 &= \frac{1}{3} \\ \iff \quad q_1 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}q_2. \end{aligned}$$

Setzen wir q_1 und q_3 in die dritte Gleichung von (1) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}q_2\right) + \frac{8}{9}q_2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}q_2 - q_2\right) &= 1 \\ \iff \quad \frac{8}{9} + \frac{2}{9} - \frac{2}{9}q_2 &= 1 \\ \iff \quad 10 - 2q_2 &= 9 \\ \iff \quad q_2 &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$q_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{und} \quad q_3 = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Also

$$\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{für } i = 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } i = 2, \\ \frac{1}{3} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

Das lineare Gleichungssystem (1) ist somit eindeutig lösbar, d. h. es existiert genau ein Martingalmaß. Das berechnete Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist zudem äquivalent zu $\mathbb{P}$, da $\mathbb{Q}(\{\omega_i\}) > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Somit gilt $|\mathscr{M}^\star| = 1$, d.h. der Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig.

b) Wir betrachten die Nutzenfunktion $U(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $x > 0$. Es gilt

$$U'(x) = \frac{1}{x^2}$$

und daher (Beachte: $\text{Bild}(U') = (0, \infty)$.)

$$(U')^{-1}(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

Wir setzen

$$Z(\omega_i) := \frac{1}{B_1} \frac{\mathbb{Q}(\{\omega_i\})}{\mathbb{P}(\{\omega_i\})} = \begin{cases} 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2} & \text{für } i = 1, \\ 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} & \text{für } i = 2, \\ 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 & \text{für } i = 3. \end{cases}$$

Laut Vorlesung ist das optimale Endvermögen gerade $X^\star = (U')^{-1}(y^\star Z)$, wobei $y^\star$ der Lagrange-Multiplikator ist, der die Bedingung $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{X^\star}{B_1}\right] = x_0$ erfüllt. Zunächst ist

$$X^\star = (U')^{-1}(y^\star Z) = \frac{1}{\sqrt{y^\star Z}}.$$

Wir bestimmen den Lagrange-Multiplikator $y^\star$ aus der Nebenbedingung

$$x_0 = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left[\frac{X^\star}{B_1}\right] = \mathbb{E}[X^\star Z] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sqrt{y^\star Z}} Z\right] = \frac{1}{\sqrt{y^\star}} \mathbb{E}[\sqrt{Z}],$$

wobei

$$\mathbb{E}[\sqrt{Z}] = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + 1\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{3} =: \kappa_0.$$

Also folgt

$$\frac{1}{\sqrt{y^\star}} = \frac{x_0}{\kappa_0}.$$

Daher ist das optimale Endvermögen

$$X^\star = \frac{1}{\sqrt{y^\star Z}} = \frac{x_0}{\kappa_0} \frac{1}{\sqrt{Z}}.$$

Dabei ist zu beachten, dass $X^\star$ $\mathcal{F}_1$-messbar ($\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}$) ist, da Z $\mathcal{F}$-messbar ist. Somit ist das optimale Endvermögen $X^\star$ in der Tat wie behauptet

$$X^\star(\omega_i) = \begin{cases} \frac{x_0}{\kappa_0}\sqrt{2} & \text{für } i = 1, \\ \frac{x_0}{\kappa_0}\sqrt{\frac{2}{3}} & \text{für } i = 2, \\ \frac{x_0}{\kappa_0} & \text{für } i = 3. \end{cases}$$