

## Lösungsblatt 11

### Aufgabe 1 (Das Log-Problem der Endnutzenmaximierung)

Betrachten Sie einen arbitragefreien CRR-Markt mit  $\mathbb{P}$  wie im Beispiel aus der Vorlesung (nach Theorem 10.3). Es sei  $x_0 > 0$  das Anfangsvermögen. Lösen Sie das Problem der Endnutzenmaximierung mit logarithmischer Nutzenfunktion:

$$(P): \quad \max \mathbb{E} [\log (V_T^\varphi)] \quad \text{s.t. } V_0^\varphi \leq x_0 \\ \varphi \text{ sf. Handelsstrategie mit } V_T^\varphi > 0.$$

- Bestimmen Sie das optimale Endvermögen  $X^*$  als Lösung des statischen Problems.
- Zeigen Sie, dass die Strategie

$$\varphi_t^* = (\alpha_t^*, \beta_t^*) = \left( a^* \frac{V_t^{\varphi^*}}{S_t}, (1 - a^*) \frac{V_t^{\varphi^*}}{B_t} \right), \quad a^* = (1 + r) \left( \frac{p}{1 + r - d} + \frac{1 - p}{1 + r - u} \right)$$

eine Hedging-Strategie für  $X^*$  ist. Hier bezeichnen  $\alpha_t^*$  und  $\beta_t^*$  die im Intervall  $[t, t + 1)$  zu haltenden Stückzahlen von Aktie bzw. risikolosem Wertpapier.  $a^*$  ist der (hier zeitunabhängige) Anteil des Vermögens, der in die Aktie investiert wird.

### Lösungsvorschlag:

Hier sei  $U := \log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  unsere Nutzenfunktion. Der Logarithmus ist strikt wachsend, strikt konkav, stetig differenzierbar und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} U'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

also handelt es sich um eine INADA-Nutzenfunktion. Zur Lösung des Endnutzenmaximierungsproblems (P) gehen wir in zwei Schritten vor.

- Wir bestimmen das optimale Endvermögen  $X^*$  als Lösung des statischen Problems. Bezeichne mit

$$\mathcal{X} := \left\{ X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid X \text{ ist } \mathcal{F}_T\text{-mb, } \mathbb{E}_Q \left[ \frac{X}{B_T} \right] \leq x_0 \right\}$$

die Menge der aus  $x_0$  erreichbaren, zulässigen Endvermögen. Wir suchen das bezüglich (P) optimale  $X^* \in \mathcal{X}$ . Optimiert wird unter  $\mathbb{P}$ , die Nebenbedingung ist aber unter  $\mathbb{Q}$  formuliert. Also wechseln wir zurück zu  $\mathbb{P}$  mit  $Z := \frac{1}{B_T} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ , erhalten daraus die Nebenbedingung

$$\mathbb{E} [ZX - x_0] \leq 0$$

und schließlich den Lagrange-Ansatz

$$L(X, y) = \mathbb{E} [\log(X) - y(ZX - x_0)].$$

Mit dem Kandidaten  $X^* := \frac{1}{y^* Z}$  gilt gerade

$$\frac{\partial}{\partial X} L(X, y)|_{X=X^*} = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{X^*} - yZ \right] = 0.$$

Der optimale Lagrange-Multiplikator  $y^*$  muss so gewählt werden, dass  $\mathbb{E}_Q[\frac{X}{B_T}] = x_0$ , d.h. die Nebenbedingung ist bindend. Durch einsetzen von  $X^*$  in die Nebenbedingung  $\mathbb{E}[ZX^* - x_0] = 0$  finden wir den optimalen Parameter  $y^*$ :

$$\mathbb{E}[ZX^* - x_0] = \frac{1}{y^*} - x_0 = 0 \iff y^* = \frac{1}{x_0}.$$

Also ist das optimale Endvermögen  $X^* = \frac{x_0}{Z}$ . Es gilt  $X \in \mathcal{X}$ , denn  $B_T$  und  $Z$  sind  $\mathcal{F}_T$ -messbar, alle Teilterme sind positiv und  $Z$  ist im CRR-Markt beschränkt (denn  $Z(\omega) = \frac{1}{B_T} Q(\{\omega\}) P(\{\omega\})^{-1}$  und beide Maße sind nach Voraussetzung konzentriert auf  $(0, 1)$ ).

b) Wir leiten zunächst die Vermögensgleichung des CRR-Modells her. Sei dazu

$$(\varphi_t)_{t=0, \dots, T-1} = (\alpha_t, \beta_t)_{t=0, \dots, T-1}$$

eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Wir spezifizieren das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$ . Wir nehmen an, dass

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(\{y_1, \dots, y_T\}) = p_{y_1} \cdot \dots \cdot p_{y_T},$$

wobei

$$y_t \in \{u, d\}, \quad p_{y_t} = \begin{cases} p, & \text{falls } y_t = u, \\ 1-p, & \text{falls } y_t = d, \end{cases} \quad p \in (0, 1), \quad t = 1, \dots, T.$$

Für das äquivalente Martingalmaß  $Q$  gilt

$$Q(\{\omega\}) = Q(\{y_1, \dots, y_T\}) = q_{y_1} \cdot \dots \cdot q_{y_T},$$

wobei

$$q_{y_t} = \begin{cases} q, & \text{falls } y_t = u, \\ 1-q, & \text{falls } y_t = d, \end{cases} \quad q = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Die Stückzahlen  $\alpha_t$  und  $\beta_t$  lassen sich in Vermögensanteile umrechnen. Der Anteil des im Intervall  $[t, t+1)$  in die Aktie investierten Vermögens ist

$$a_t = \frac{\alpha_t S_t}{V_t^\varphi} \iff \alpha_t = a_t \frac{V_t^\varphi}{S_t};$$

da wir stets das gesamte Vermögen investieren gilt für den Vermögensanteil  $1 - a_t$  im Bond

$$1 - a_t = \frac{\beta_t B_t}{V_t^\varphi} \iff \beta_t = (1 - a_t) \frac{V_t^\varphi}{B_t}.$$

Die Variable  $Y_t := \frac{S_t}{S_{t-1}} \in \{u, d\}$ ,  $t = 1, \dots, T$ , gibt den Multiplikator des Aktienkurses beim Wechsel von  $S_{t-1}$  auf  $S_t$  an. Mit diesen Bezeichnungen gilt für  $t = 0, \dots, T-2$

$$\begin{aligned} V_{t+1}^\varphi &= \alpha_{t+1} S_{t+1} + \beta_{t+1} B_{t+1} \\ &= \alpha_t S_{t+1} + \beta_t B_{t+1} \\ &= \alpha_t S_t Y_{t+1} + \beta_t B_t (1+r) + \alpha_t S_t - \alpha_t S_t \\ &= V_t^\varphi + \alpha_t S_t (Y_{t+1} - 1) + \beta_t B_t r \\ &= V_t^\varphi + a_t V_t^\varphi (Y_{t+1} - 1) + V_t^\varphi r - a_t V_t^\varphi r \\ &= V_t^\varphi (1+r + a_t (Y_{t+1} - 1 - r)) \end{aligned}$$

und daher rekursiv die Vermögensgleichung

$$V_t^\varphi = V_0^\varphi \prod_{n=1}^t (1+r + a_{n-1} (Y_n - 1 - r)).$$

Wir setzen die laut Behauptung optimale Strategie ein und überprüfen, ob diese das in Teil a) bestimmte optimale Endvermögen erreicht. Falls  $Y_n = u$  gilt, läßt sich der  $n$ -te Faktor zu

$$\begin{aligned} 1+r + a^*(Y_n - 1 - r) &= 1+r + (1+r) \left( \frac{p}{1+r-d} + \frac{1-p}{1+r-u} \right) (u-1-r) \\ &= (1+r) \left( 1 + \left( \frac{p(u-1-r)}{1+r-d} - (1-p) \right) \right) \\ &= (1+r)p \left( \frac{u-1-r}{1+r-d} + 1 \right) \\ &= (1+r) \frac{p}{q} \end{aligned}$$

vereinfachen. Analog gilt im gegenteiligen Fall  $Y_n = d$

$$\begin{aligned} 1+r+a^*(Y_n-1-r) &= 1+r+(1+r)\left(\frac{p}{1+r-d}+\frac{1-p}{1+r-u}\right)(d-1-r) \\ &= (1+r)\left(1-p+\frac{(1-p)(d-1-r)}{1+r-u}\right) \\ &= (1+r)\left((1-p)\frac{1+(d-1-r)}{1+r-u}\right) \\ &= (1+r)\frac{1-p}{1-q}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Vermögensgleichung finden wir

$$V_T^{\varphi^*}(\omega) = V_T^{\varphi^*}(y_1, \dots, y_T) = V_0^{\varphi^*} \prod_{n=1}^T (1+r) \frac{p_{y_n}}{q_{y_n}} = V_0^{\varphi^*} B_T \frac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{Q}(\omega)},$$

also wie gewünscht  $V_T^{\varphi^*} = V_0^{\varphi^*} B_T \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{x_0}{Z} = X^*$ .

## Aufgabe 2 (Wurzelfunktion)

Gegeben sei ein 2-periodiger CRR-Finanzmarkt mit Parametern  $u = \frac{4}{3}$ ,  $d = \frac{2}{3}$  und  $r = \frac{1}{6}$ . Der Anfangswert des risikobehafteten Wertpapiers sei  $S_0 = 18$ .  $\mathbb{P}$  sei die Gleichverteilung auf  $\Omega = \{(u, u), (u, d), (d, u), (d, d)\}$ . Die Präferenzen eines Investors seien durch die Nutzenfunktion

$$U: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad U(x) = \sqrt{x}$$

repräsentiert.

- Zeigen Sie, dass  $U$  der Inada-Bedingung genügt.
- Der Investor möchte den erwarteten Nutzen, welchen er aus seinem Endvermögen zur Zeit  $T = 2$  zieht, maximieren. Bestimmen Sie das optimale Endvermögen bei gegebenem Anfangsvermögen  $x_0 > 0$ .

## Lösungsvorschlag:

- Es gilt  $U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , d.h.  $U' \in C^1(0, \infty)$ . Ferner  $\lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$ . Somit ist die Inada-Bedingung erfüllt.
- Wir verwenden die Martingalmethode. Das äquivalente Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  ist durch den Parameter  $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{3}{4}$  charakterisiert. Der entsprechende Parameter von  $\mathbb{P}$  ist  $p = \frac{1}{2}$ . Weiter ist  $B_2 = (1+r)^2 = \frac{49}{36}$ . Die state price density  $Z = \frac{\mathbb{Q}}{B_2 \mathbb{P}}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Z(uu) &= \frac{q^2}{B_2 p^2} = \frac{81}{49}, & Z(ud) &= \frac{q(1-q)}{B_2 p^2} = \frac{27}{49}, \\ Z(du) &= \frac{q(1-q)}{B_2 p^2} = \frac{27}{49}, & Z(dd) &= \frac{(1-q)^2}{B_2 p^2} = \frac{9}{49}. \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion von  $U'$  ist  $I: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ,  $I(y) = \frac{1}{(2y)^2}$ . Nach der Vorlesung ist das optimale Endvermögen  $X^* = I(y^*Z) = \frac{1}{(2y^*Z)^2}$ . Der Multiplikator  $y^*$  ist durch die Nebenbedingung

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X^*}{B_2} \right] = \mathbb{E} [X^* Z] = \frac{1}{(2y^*)^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{Z} \right] = \frac{1}{(2y^*)^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{49}{81} + \frac{49}{27} + \frac{49}{27} + \frac{49}{9} \right) \\ &= \frac{1}{(2y^*)^2} \cdot \frac{196}{81} \end{aligned}$$

bestimmt. Folglich ist  $X^* = \frac{81x_0}{196Z^2}$ .

### Aufgabe 3 (Ein unlösbares Portfolioproblem)

Betrachten Sie einen einperiodigen Finanzmarkt mit einem unverzinsten risikolosen Wertpapier und einer Aktie mit Startwert  $S_0 = 1$  und Überrendite  $R_1$ ,  $\mathbb{P}(R_1 = 1) = \frac{3}{4} = 1 - \mathbb{P}(R_1 = -1)$ . Ein Investor hat eine unbekannte, stetig differenzierbare Nutzenfunktion  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wissen nur, dass sie auf den ganzen Zahlen mit der linearen Interpolation  $\tilde{U}$  übereinstimmt, wobei  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert ist durch

$$\tilde{U}(0) = 0, \quad \tilde{U}'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2}, & x \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \\ 3 - \frac{1}{n^2}, & x \in (n, n+1], \quad n \in -\mathbb{N}. \end{cases}$$

Der Investor möchte folgendes Portfolioproblem lösen:

$$(P) \quad \max \mathbb{E}[U(V_1^\varphi)] \quad \text{s.t.} \quad V_0^\varphi = 0, \quad \varphi \text{ sf. Handelsstrategie.}$$

- Bestimmen Sie die Preisprozesse und zeigen Sie, dass (NA) gilt.
- Skizzieren Sie  $\tilde{U}$ .
- Zeigen Sie, dass (P) keine Lösung besitzt. Wie lässt sich das mit Theorem 10.6 in Einklang bringen?

#### Lösungsvorschlag:

- Der Finanzmarkt ist ein einperiodiges CRR-Modell ( $\Omega = \{u, d\}$ ) mit Bondpreisen  $B_0 = B_1 = 1$  und Aktienpreisen  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = \begin{cases} uS_0, & \omega = u, \\ dS_0, & \omega = d, \end{cases}$  wobei  $u = R_1(u) + 1 = 2$  mit  $\mathbb{P}(\{u\}) = \frac{3}{4}$  und  $d = R_1(d) + 1 = 0$  mit  $\mathbb{P}(\{d\}) = \frac{1}{4}$ . Wegen  $d < 1 + r < u$  gilt (NA).
- Die Funktion  $\tilde{U} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist über die Ableitung definiert:

$$\begin{cases} \tilde{U}(0) = 0, \\ \tilde{U}'(x) = 1 + \frac{1}{n^2}, & x \in (n-1, n], \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{U}'(x) = 3 - \frac{1}{n^2}, & x \in (n, n+1], \quad n \in -\mathbb{N}. \end{cases}$$

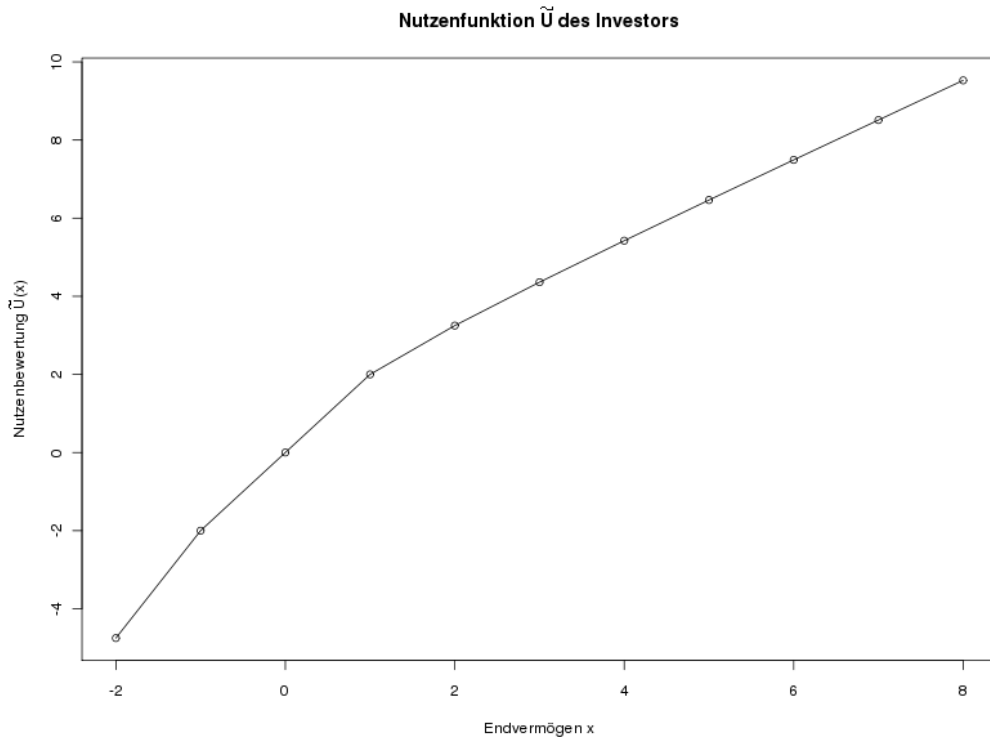
Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\tilde{U}(n) = \tilde{U}(n-1) + \tilde{U}'(n)$ , denn die Ableitung ist stückweise konstant. Induktiv folgt

$$\tilde{U}(n) = \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{1}{i^2}\right) = n + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Analog gilt für  $n \in -\mathbb{N}$ , dass  $\tilde{U}(n) = \tilde{U}(n+1) - \tilde{U}'(n+1)$ , also

$$\tilde{U}(n) = - \sum_{i=1}^{-n} \left(3 - \frac{1}{i^2}\right) = 3n + \sum_{i=1}^{-n} \frac{1}{i^2}, \quad n \in -\mathbb{N}.$$

Die approximierten Nutzenfunktion ist stückweise linear mit Graph



c) Wegen  $r = 0$  und  $v_0 = 0$  vereinfacht sich das Portfolioproblem zu

$$(P): \max \mathbb{E}[U(aR_1)] \quad \text{s.t.} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Wir betrachten die Funktion  $M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $M(x) = \mathbb{E}[U(xR_1)] = \frac{3}{4}U(x) + \frac{1}{4}U(-x)$  und zeigen, dass diese kein Maximum hat. Dafür zeigen wir, dass  $M$  streng monoton wachsend ist. Es gilt

$$M'(x) = \frac{3}{4}U'(x) - \frac{1}{4}U'(-x).$$

Da  $U$  konkav und stetig differenzierbar ist, gilt  $U(y) - U(x) \leq U'(x)(y - x)$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$ . Wegen der Konkavität ist  $U'$  monoton fallend und es folgt

$$U'(x) \geq U'(\lfloor x \rfloor + 2) - U'(\lfloor x \rfloor + 1), \quad U'(x) \leq U'(\lfloor x \rfloor) - U'(\lfloor x \rfloor - 1).$$

Folglich gilt

$$M'(x) \geq \frac{3}{4}(U'(\lfloor x \rfloor + 2) - U'(\lfloor x \rfloor + 1)) - \frac{1}{4}(U'(\lfloor x \rfloor) - U'(\lfloor x \rfloor - 1)).$$

Wir definieren  $y := \lfloor x \rfloor$ .

Für  $x > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} M'(x) &\geq \frac{3}{4} \left( \left( (y+2) + \sum_{i=1}^{y+2} \frac{1}{i^2} \right) - \left( (y+1) + \sum_{i=1}^{y+1} \frac{1}{i^2} \right) \right) - \frac{1}{4} \left( -3y + \sum_{i=1}^y \frac{1}{i^2} - \left( -3y - 3 + \sum_{i=1}^{y+1} \frac{1}{i^2} \right) \right) \\ &= \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{(y+2)^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 3 - \frac{1}{(y+1)^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Für  $x < 0$  gilt:

$$\begin{aligned} M'(x) &\geq \frac{3}{4} \left( \left( 3(y+2) + \sum_{i=1}^{-y-2} \frac{1}{i^2} \right) - \left( 3(y+1) + \sum_{i=1}^{-y-1} \frac{1}{i^2} \right) \right) - \frac{1}{4} \left( -y + \sum_{i=1}^{-y} \frac{1}{i^2} - \left( -y - 1 + \sum_{i=1}^{-y-1} \frac{1}{i^2} \right) \right) \\ &= \frac{3}{4} \left( 3 - \frac{1}{(y+1)^2} \right) - \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Aufgrund der Monotonie von  $U'$  müssen wir den Fall  $x = 0$  nicht separat betrachten und wir können direkt folgern, dass das Optimierungsproblem nicht lösbar ist. Theorem 10.6 und nachfolgender Bemerkung ist dennoch nicht widersprochen worden, denn  $U$  ist nicht beschränkt.

#### Aufgabe 4 (Das mehrperiodige Log-Problem)

Betrachten Sie in einem allgemeinen diskreten arbitragefreien Finanzmarkt das mehrperiodige Portfolioproblem mit positivem Startvermögen und logarithmischem Nutzen, d.h. die Wertfunktion

$$J_T(x) := \log(x), \quad J_t(x) := \sup_{\pi} \mathbb{E} [\log(V_T^{\pi}) \mid V_t^{\pi} = x], \quad t = 0, \dots, T-1,$$

wobei nur Politiken  $\pi$  zulässig sind, welche  $V_t^{\pi}(x) > 0$  garantieren für alle  $x > 0$  und  $t = 0, \dots, T$ . Finden Sie mit Hilfe dynamischer Programmierung die optimale Anlagepolitik  $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$  sowie eine möglichst explizite Darstellung der Wertfunktion.

#### Lösungsvorschlag:

Wir suchen also eine optimale Investitionspolitik  $\pi^* = (f_0^*, \dots, f_{T-1}^*)$  bestehend aus den stufenweisen Maximisatoren. Gegeben ein Zwischenvermögen von  $x$  zur Zeit  $t$  investiert man dann für die nächste Periode optimalerweise die Beträge  $\phi_t = f_t^*(x)$  in die verschiedenen Anlagen. Das mit dieser Strategie gesteuerte Vermögen bezeichnet man mit  $(V_t^{\phi})_{t=0, \dots, T}$  oder gleichbedeutend mit  $(V_t^{\pi^*})_{t=0, \dots, T}$ . Es ergibt sich die Wertfunktion

$$J_T(x) := \log(x), \quad J_t(x) := \sup_{\pi} \{\mathbb{E} [\log(V_T^{\pi}) \mid V_t^{\pi} = x]\}. \quad (1)$$

Die Investitionspolitik  $\pi^*$  ist optimal, wenn  $J_0(x) = \mathbb{E} [\log(V_T^{\pi^*}) \mid V_0^{\pi^*} = x_0]$  für alle  $x$  und  $t$ . Der Suchraum muss hier noch auf solche Politiken eingeschränkt werden, die fast sicher strikt positive Zwischenvermögen garantieren, damit die Nutzenbewertung mit dem Logarithmus wohldefiniert ist.

Zum Periodenende gilt nach Definition  $J_T = \log$ . Für jeden Schritt nach vorne nutzen wir die Bellman-Gleichung

$$J_t(x) = \sup_f \{\mathbb{E} [J_{t+1}((1+r_{t+1})(x+f(x) \cdot R_{t+1}))]\}, \quad x > 0. \quad (2)$$

Zur Zeit  $t = T-1$  bedeutet das gerade

$$\begin{aligned} J_{T-1}(x) &\stackrel{(2)}{=} \sup_f \{\mathbb{E} [J_T((1+r_T)(x+f(x) \cdot R_T))]\} \\ &= \sup_f \{\mathbb{E} [\log((1+r_T)(x+f(x) \cdot R_T))]\} \\ &= \log(1+r_T) + \sup_f \{\mathbb{E} [\log(x+f(x) \cdot R_T)]\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Wir transformieren allgemeingültig  $f_{T-1}(x) = \alpha_{T-1}(x)x$ , d.h. wir schreiben die optimale Strategie als Anteil des Vermögens. Dieser Ansatz ist durch Blatt 12 Aufgabe 1 motiviert. Wir schränken die Wahl solcher  $\alpha$ 's noch so ein, dass stets positive Zwischenvermögen garantiert sind:

$$\alpha_{T-1}(x) \in \mathfrak{A}_{T-1}, \quad \mathfrak{A}_t := \{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^d : 1 + \tilde{\alpha} \cdot R_{t+1} > 0 \text{ IP-f.s.}\}, \quad t = 0, \dots, T-1$$

Eingesetzt in (3) ergibt sich

$$\begin{aligned} J_{T-1}(x) &\stackrel{(3)}{=} \log(x) + \log(1+r_T) + \sup_{\alpha(x) \in \mathfrak{A}_{T-1}} \{\mathbb{E} [\log(1+\alpha(x) \cdot R_T)]\} \\ &\stackrel{\star}{=} \log(x) + \log(1+r_T) + \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}_{T-1}} \{\mathbb{E} [\log(1+\alpha \cdot R_T)]\} \\ &= \log(x) + d_{T-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

wobei  $d_{T-1} := \log(1+r_T) + \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}_{T-1}} \{\mathbb{E} [\log(1+\alpha \cdot R_T)]\}$  den vom Vermögen unabhängigen Teil der Wertfunktion bezeichnet. Wir können im Schritt  $\star$  die Optimierung unabhängig von  $x$  durchführen, weil der Maximierer nicht von  $x$  abhängt, notieren also nur noch  $\alpha$  und erhalten ein vom Vermögen unabhängiges  $d_{T-1}$ . Wir vermuten, dass eine solche Separation zu jeder Zeit möglich ist, also

$$J_t(x) = \log(x) + d_t \quad (5)$$

gilt mit vermögensunabhängigem  $d_t$  für alle  $t \in \{0, \dots, T\}$  und alle  $x > 0$ . Wir zeigen durch Induktion, dass dies richtig ist:

- **IA** ( $t = T$ ): Klar, wähle schlicht  $d_T := 0$ .

■ **IV:** Es gelte (5) zur Zeit  $t + 1$ .

■ **IS** ( $t + 1 \rightarrow t$ ): Zerlege wieder  $f_t(x) = \alpha_t(x)x$  mit  $\alpha_t(x) \in \mathfrak{A}_t$ . Für alle  $x > 0$  gilt

$$\begin{aligned}
 J_t(x) &\stackrel{(2)}{=} \sup_f \{ \mathbb{E} [J_{t+1} ((1 + r_{t+1})(x + f(x) \cdot R_{t+1}))] \} \\
 &= \sup_{\alpha(x) \in \mathfrak{A}_t} \{ \mathbb{E} [J_{t+1} ((1 + r_{t+1})(1 + \alpha(x) \cdot R_{t+1})x)] \} \\
 &\stackrel{(IV)}{=} \sup_{\alpha(x) \in \mathfrak{A}_t} \{ \mathbb{E} [\log((1 + r_{t+1})(1 + \alpha(x) \cdot R_{t+1})x) + d_{t+1}] \} \\
 &= \log(x) + \log(1 + r_{t+1}) + \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}_t} \{ \mathbb{E} [\log(1 + \alpha \cdot R_{t+1})] \} + d_{t+1} \\
 &= \log(x) + d_t, \tag{6}
 \end{aligned}$$

wobei  $d_t := \log(1 + r_{t+1}) + \sup_{\alpha_t \in \mathfrak{A}_t} \{ \mathbb{E} [\log(1 + \alpha_t \cdot R_{t+1})] \} + d_{t+1}$  wie gewünscht vom Vermögen unabhängig ist. Die behauptete Darstellung der Wertfunktion haben wir damit gezeigt.

Die optimalen  $\alpha_t^* := \operatorname{argsup}_{\alpha \in \mathfrak{A}_t} \{ \mathbb{E} [\log(1 + \alpha \cdot R_{t+1})] \}$  sowie die Optimisatoren  $f_t^*(x) = \alpha_t^* x$  werden wir ohne Kenntnis der Verteilungen der (relativen) Renditen  $R_{t+1}$  nicht näher bestimmen können. Die  $d_t$  sowie die Wertfunktionen  $J_t$  hängen weiterhin von den Zinssätzen  $r_{t+1}$ , also vom gesamten Marktmodell ab.