Lösungsblatt 12

Aufgabe 1 (Das Exp-Problem mit normalverteilten Erträgen)

Lösen Sie das Mehrperioden-Problem der Portfoliooptimierung für exponentielle Nutzenbewertung $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $U(x) := -e^{-\gamma x}$ für ein $\gamma > 0$, und unabhängig normalverteilter Überrendite $R_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $t = 1, \dots, T$. Beschränken Sie sich auf $d = 1$ Aktie und ein unverzinstes risikoloses Wertpapier $B_t \equiv 1$.
Hinweis: Sie können sich am Beispiel aus dem Kapitel „mehrperiodige Endnutzenmaximierung“ orientieren.

Lösungsvorschlag:
Im Beispiel aus der Vorlesung wurde gezeigt

$$J_t(x) = -d_t \cdot \ldots \cdot d_T\, e^{-\gamma x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t = 0, \dots, T,$$

wobei

$$d_T = 1, \quad d_t = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\exp\left(-\gamma \frac{B_T}{B_t} a R_{t+1}\right)\right], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

Da $r \equiv 0$ und $R_1, \dots R_T$ unabhängig identisch verteilt sind, folgt

$$d_t = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\exp(-\gamma a R_1)\right], \quad t = 0, \dots, T-1.$$

So ist die optimale Investitionspolitik ein konstanter Betrag $f_t^\star(x) = a^\star$ $(t = 1, \dots, T-1)$, wobei $a^\star$ die Minimumstelle von $\inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[\exp(-\gamma a R_1)\right]$ ist. Wir können hier weiter ausnutzen, dass wir die Verteilung der Rendite kennen: Die momentenerzeugende Funktion von $R_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$m_{R_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad m_{R_1}(s) = \mathbb{E}[e^{sR_1}] = e^{\mu s + \frac{1}{2} s^2 \sigma^2}.$$

Also

$$\mathbb{E}[e^{-\gamma a R_1}] = e^{-\mu\gamma a + \frac{1}{2}\gamma^2 a^2 \sigma^2} =: g(a).$$

Wir bestimmen die Minimumstelle von g:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} g(a) &= g(a)\left(-\mu\gamma + \sigma^2\gamma^2 a\right) = 0 \quad \iff \\ a^\star &= \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial a^2} g(a)\bigg|_{a=a^\star} &= g(a^\star)\sigma^2\gamma^2 > 0, \end{aligned}$$

also ist $a^\star$ das die Minimumstelle. D. h. die optimale Investitionspolitik besteht darin, zeitunabhängig den Betrag $f_t^\star(x) = a^\star = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$ in die Aktie zu investieren. Durch einsetzen der Minimumstelle $a^\star$ in g erhält man

$$d_t = g(a^\star) = e^{-\mu\gamma\frac{\mu}{\gamma\sigma^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{\mu^2}{\gamma^2\sigma^4}\sigma^2} = e^{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}}, \quad t = 0, \dots, T-1,$$

und somit

$$J_0(x) = -d_0 \cdot \ldots \cdot d_T\, e^{-\gamma x} = -(g(a^\star))^T e^{-\gamma x} = -e^{-\left(\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}T + \gamma x\right)}.$$

Aufgabe 2 (Markowitz-Problem mit maximal negativer Korrelation)

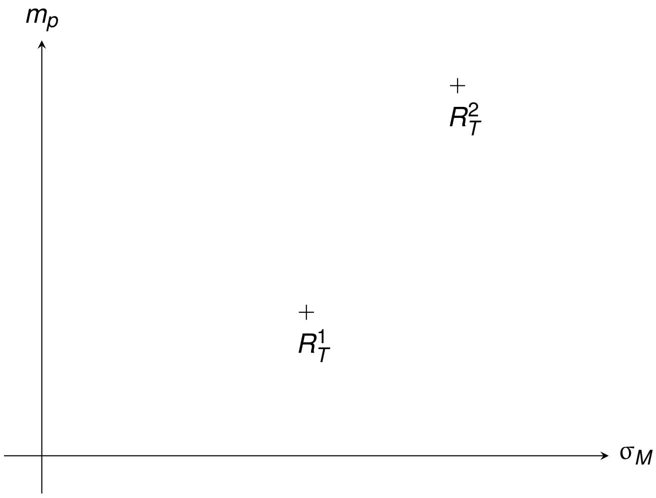
Betrachten Sie das Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz mit zwei risikobehafteten Anlagemöglichkeiten. Diese beiden Anlagemöglichkeiten seien dabei maximal negativ korreliert, d.h. es gilt

$$\rho = \frac{\operatorname{Cov}(R_T^1, R_T^2)}{\sqrt{\operatorname{Var}(R_T^1)\operatorname{Var}(R_T^2)}} = -1.$$

Hinweis: Hier ist die Kovarianzmatrix Σ nicht positiv definit.

a) Wie sieht die Varianz des Gesamtportfolios $\operatorname{Var}(R^\pi)$ aus?

b) Skizzieren Sie in folgender Abbildung die Portfoliogrenze in dieser Situation und begründen Sie deren Verlauf mathematisch.



c) Welche erwartete Rendite und welche Varianz hat das Minimum-Varianz-Portfolio (MVP)?

Lösungsvorschlag:
Zunächst sei bemerkt, dass mit dem Hinweis klar ist, dass die in der Vorlesung für positiv definite Kovarianzmatrizen entwickelte Theorie hier so nicht anwendbar ist. Wir lösen die Fragestellungen also „von Hand“.

a) Definieren wir die Standardabweichungen $\sigma_1 := \sqrt{\operatorname{Var}(R_T^1)}$, $\sigma_2 := \sqrt{\operatorname{Var}(R_T^2)}$ und die Kovarianz $\sigma_{12} := \operatorname{Cov}(R_T^1, R_T^2)$, so erhalten wir die Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^1 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

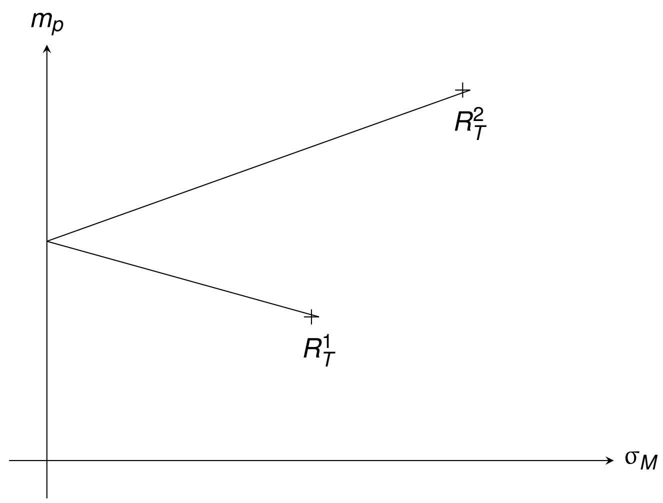
da $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_2$ (Beachte: $\sigma_{ii} = \sigma_i^2, i = 1, 2$). Für einen Portfoliovektor $\pi = (\pi_1, 1-\pi_1)^\top$ folgt

$$\sigma^2(\pi) = \operatorname{Var}(R^\pi) = \pi^\top\Sigma\pi = \sum_{k,j=1}^{2} \pi_k\sigma_{kj}\pi_j = \pi_1^2\sigma_1^2 - 2\pi_1(1-\pi_1)\sigma_1\sigma_2 + (1-\pi_1)^2\sigma_2^2 = (\pi_1\sigma_1 - (1-\pi_1)\sigma_2)^2.$$

b) Wir betrachten die (σ_M, m_p)-Ebene. Also interessieren wir uns zunächst für die Standardabweichung und nicht für die Varianz des Portfolios. Wir erhalten:

$$\sigma_M(\pi) = \sqrt{\operatorname{Var}(R^\pi)} = |\pi_1\sigma_1 - (1-\pi_1)\sigma_2| = |\pi_1(\sigma_1+\sigma_2) - \sigma_2| = \begin{cases} \pi_1(\sigma_1+\sigma_2) - \sigma_2, & \text{falls } \pi_1 \geqslant \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}, \\ \sigma_2 - \pi_1(\sigma_1+\sigma_2), & \text{falls } \pi_1 < \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}. \end{cases}$$

Da die erwartete Rendite des Portfolios m_p linear von π_1 abhängt und hier auch die Standardabweichung des Portfolios $\sigma(\pi)$ linear in π_1 ist, folgt, dass m_p linear von σ abhängt. Außerdem ist ersichtlich, dass $\sigma(\pi) = 0$ erreicht werden kann für $\pi_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$. Wir erhalten also folgendes schematisches Aussehen der Portfoliogrenze:



c) Wie bereits in b) gesehen, kann $\sigma(\pi) = 0$ erreicht werden durch $\pi_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$. Das MVP ist also

$$\pi^\star_{\text{MVP}} = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} \right)^\top$$

mit

$$\text{Var}(R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}) = 0.$$

Die erwartete Rendite des MVP ist

$$\mathbb{E}[R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}] = \pi^\star_{\text{MVP}} \cdot m = \frac{\sigma_2 m_1 + \sigma_1 m_2}{\sigma_1 + \sigma_2},$$

wobei wir wie üblich die erwarteten Renditen der i-ten Anlagemöglichkeit mit m_i bezeichnet haben. Der Punkt an dem die Portfoliogrenze die m_p-Achse trifft ist also der Punkt $\left(0, \frac{\sigma_2 m_1 + \sigma_1 m_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)$ in obiger Darstellung.

Aufgabe 3 (Markowitz-Problem - alte Klausuraufgabe)

Wir betrachten das Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz mit zwei risikobehafteten Anlagen mit den zufälligen Renditen R_T^1, R_T^2. Die zugehörige Kovarianzmatrix der Renditen sei

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\,\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\,\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

wobei σ_1^2 die Varianz der Rendite R_T^1, σ_2^2 die Varianz der Rendite R_T^2 und ρ den Korrelationskoeffizienten von R_T^1 und R_T^2 bezeichnen. Die Matrix Σ sei positiv definit.

a) Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio π_{MVP} in Abhängigkeit von σ_1, σ_2 und ρ.

b) Zeigen Sie, dass für die minimale Varianz σ^2_{MVP} gilt:

$$\sigma^2_{\text{MVP}} < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\},$$

falls $\rho \neq \frac{\min\{\sigma_1,\sigma_2\}}{\max\{\sigma_1,\sigma_2\}}$, d. h. in diesem Fall ist die minimale Varianz kleiner als die der einzelnen Anlagen.

Lösungsvorschlag:

a) Laut Vorlesung gilt:

$$\pi_{\text{MVP}} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}e \quad \text{mit } C = e^\top \Sigma^{-1} e.$$

(Beachte: Die Annahme der Vorlesung, dass die Vektoren $e = (1,1)$ und m (Vektor der erwarteten Renditen) linear unabhängig sind, ist für die Berechnung des Minimum-Varianz-Portfolios nicht notwendig.)
Es gilt

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2} \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$C = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2}$$

und somit

$$\pi_{\text{MVP}} = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\begin{pmatrix}\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \\ \sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Man kann das MVP auch direkt bestimmen. Wir bezeichnen dazu mit $\alpha \in [0,1]$ den Anteil des Vermögens, der in die Anlage mit der Rendite R_T^1 investiert wird. Ein Portfolio aus beiden Analgen ist somit gegeben durch $\pi = (\alpha, 1-\alpha)$. Die Varianz eines Portfolios π ist

$$\begin{aligned}\sigma^2(\pi) &= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_{12} \overset{\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}}{=} \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\rho\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}_{=:a})\alpha^2 - 2(\underbrace{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}_{=:b})\alpha + \underbrace{\sigma_2^2}_{=:c} \\ &= a\alpha^2 - 2b\alpha + c := f(\alpha)\end{aligned}$$

Wir bestimmen eine Minimumstelle von f:

$$f'(\alpha) = 2a\alpha - 2b \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \quad \alpha^\star = \frac{b}{a} = \frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Bei $\alpha^\star$ handelt es sich um eine Minimumstelle von f, da

$$f''(\alpha) = 2a = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2) \overset{\rho\in[-1,1]}{\geqslant} 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2) = 2(\sigma_1 - \sigma_2)^2 > 0.$$

(Alternative Begründung: Da $f(\alpha) = (\alpha, 1-\alpha)\Sigma(\alpha, 1-\alpha)^\top$ und aufgrund der positiven Definitheit von Σ, ist $f(\alpha)$ streng konvex und somit $\alpha^\star$ eine eindeutige Minimumstelle.) Also ist das Minimum-Varianz-Portfolio $\pi^\star_{\text{MVP}}$ gegeben durch

$$\pi_{\text{MVP}} = \begin{pmatrix}\alpha^\star \\ \\ 1-\alpha^\star\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} \\ \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\end{pmatrix}.$$

b) Laut Vorlesung ist die minimale Varianz σ^2_{MVP} gegeben durch

$$\sigma^2_{\text{MVP}} = \frac{1}{C} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - (\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \sigma^2_{\text{MVP}} < \sigma_1^2 \\ \iff \quad & \sigma_1^2\sigma_2^2 - \rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2 < \sigma_1^4 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_1^2\rho\sigma_1\sigma_2 \\ \iff \quad & 0 < (\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2)^2 \\ \iff \quad & \rho \neq \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\sigma^2_{\text{MVP}} < \sigma_2^2 \iff \rho \neq \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

Folglich ist $\sigma^2_{\text{MVP}} < \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\}$, falls $\rho \neq \frac{\min\{\sigma_1,\sigma_2\}}{\max\{\sigma_1,\sigma_2\}}$.

Bemerkung: Alternativ lässt sich die minimale Varianz σ^2_{MVP} auch berechnen durch

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\mathrm{MVP}} = f(\alpha^\star) = f\left(\tfrac{b}{a}\right) = a\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2b\frac{b}{a} + c = -\frac{b^2}{a} + c = \frac{ac-b^2}{a} \\
&= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^2 - (\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2} \\
&= \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2+\sigma_2^4-2\sigma_2^2\rho\sigma_1\sigma_2-\sigma_2^4+2\sigma_2^2\rho\sigma_1\sigma_2-\rho^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2} \\
&= \frac{\sigma_1^1\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (Varianzminimales Portfolio bestimmen)

Gegeben seien zwei unkorrelierte Wertpapiere, die in einem einperiodigen Markt mit Standardabweichung $\sigma_1 = \frac{3}{10}$ bzw. $\sigma_2 = \frac{1}{10}$ die erwarteten Renditen $m_1 = \frac{1}{4}$ bzw. $m_2 = \frac{3}{20}$ erwirtschaften.

a) Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio aus beiden Wertpapieren sowie dessen Erwartungswert und Standardabweichung.

b) Stellen Sie die erwartete Rendite $m(\pi)$ eines Portfolios π als Funktion der Varianz $\sigma^2(\pi)$ des Portfolios dar.

c) Dem Investor stehe nun als weitere Anlagemöglichkeit eine risikolose Anlage mit Verzinsung von 10% zur Verfügung. Bestimmen Sie ein optimales Portfolio mit erwarteter Rendite von 20% sowie dessen Standardabweichung.

Lösungsvorschlag:

Gegeben sind zwei unkorrelierte Wertpapiere, die in einem einperiodigen Markt mit Standardabweichung $\sigma_1 = \frac{3}{10}$ bzw. $\sigma_2 = \frac{1}{10}$ die erwarteten Renditen $m_1 = \frac{1}{4}$ bzw. $m_2 = \frac{3}{20}$ erwirtschaften. Bezeichne mit R_1 bzw. R_2 die zufällige Rendite der Papiere. Das heißt für ein Portfolio π, das den Anteil π_1 des Vermögens in das erste Papier steckt und den Rest $\pi_2 = 1-\pi_1$ in das zweite Papier, ergibt sich die Rendite

$$\begin{aligned}
R^\pi &= \pi_1 R_1 + (1-\pi_1)R_2, \\
m(\pi) = \mathbb{E}[R^\pi] &= \pi_1 m_1 + (1-\pi_1)m_2, \\
\sigma^2(\pi) = \mathrm{Var}(R^\pi) &= \pi_1^2\sigma_1^2 + 2\pi_1(1-\pi_1)\sigma_{12} + (1-\pi_1)^2\sigma_2^2.
\end{aligned}$$

a) Wir berechnen zunächst das MVP sowie dessen Erwartungswert und Standardabweichung direkt, d.h. ohne Verwendung der Resultate aus Kapitel 11 der Vorlesung. Danach zeigen wir, dass man unter Verwendung dieser Resultate zum gleichen Ergebnis kommt.

Da die Renditen unkorreliert sind, gilt wie vorbemerkt

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\pi) &= \pi_1^2\sigma_1^2 + (1-\pi_1)^2\sigma_2^2 \\
&= \frac{9}{100}\pi_1^2 + \frac{1}{100}(1-\pi_1)^2 \\
&= \frac{1}{10}\pi_1^2 - \frac{1}{50}\pi_1 + \frac{1}{100}, \\
\frac{\partial}{\partial \pi_1}\sigma^2(\pi) &= \frac{1}{5}\pi_1 - \frac{1}{50} = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
\pi_1^* &= \frac{1}{10}.
\end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung der Varianz nach π_1 positiv ist, erhalten wir das MVP

$$\pi^\star_{\mathrm{MVP}} = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)^\top$$

mit erwarteter Rendite

$$\mathbb{E}[R^{\pi^\star_{\mathrm{MVP}}}] = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{10}\cdot\frac{3}{20} = \frac{4}{25}$$

und Varianz

$$\operatorname{Var}(R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{100} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{100} = \frac{9}{1000}.$$

Wenn wir den Ansatz zur Portfoliooptimierung nach Markowitz aus der Vorlesung verwenden, so erhalten wir das selbe Ergebnis wie folgt:

Zunächst prüfen wir die Voraussetzungen und stellen fest:

- Der Vektor $m = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}$ ist linear unabhängig zum Vektor $e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Die Matrix $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}$ ist positiv definit.

Nach der Vorlesung existiert dann ein MVP $\pi^\star_{\text{MVP}}$ mit erwarteter Rendite $\frac{A}{C}$ und global minimaler Varianz $\frac{1}{C}$. Das MVP ist gegeben durch

$$\pi^\star_{\text{MVP}} := \frac{1}{C}\Sigma^{-1}e,$$

wobei

$$A := m^\top \Sigma^{-1} e = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{20}\right) \begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{160}{9},$$

$$C := e^\top \Sigma^{-1} e = (1, 1) \begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1000}{9}.$$

Das MVP ist also

$$\pi^\star_{\text{MVP}} = \frac{9}{1000} \begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{9}{10} \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{9}{10} \end{pmatrix},$$

und hat dabei die global minimale Varianz von

$$\operatorname{Var}(R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}) = \frac{9}{1000},$$

sowie erwartete eine Rendite von

$$\mathbb{E}[R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}] = \frac{9}{1000} \cdot \frac{160}{9} = \frac{4}{25}.$$

b) Wir stellen die erwartete Rendite $m(\pi)$ eines Portfolios π als Funktion der Varianz $\sigma^2(\pi)$ des selben Portfolios dar. Aus Teil a) wissen wir

$$\begin{aligned} \sigma^2(\pi) &= \frac{1}{10}\pi_1^2 - \frac{1}{50}\pi_1 + \frac{1}{100} \quad \Longleftrightarrow \\ 0 &= \pi_1^2 - \frac{1}{5}\pi_1 + \frac{1}{10} - 10\sigma^2(\pi) \quad \Longleftrightarrow \\ \pi_1 &= \frac{1}{10} \pm \sqrt{10\sigma^2(\pi) - \frac{9}{100}}. \end{aligned}$$

Hier gilt weiter $m(\pi) = \pi_1(m_1 - m_2) + m_2$, also

$$m(\sigma^2) = \left(\frac{1}{10} \pm \sqrt{10\sigma^2(\pi) - \frac{9}{100}}\right)(m_1 - m_2) + m_2.$$

c) Dem Investor steht nun als weitere Anlagemöglichkeit eine risikolose Anlage mit Verzinsung $R^0 = 10\%$ zur Verfügung. Das ist das in der Vorlesung besprochene Modell von Tobin. Die optimalen Portfolios liegen auf der Kapitalmarktlinie

$$m_p = R^0 + \sigma_{\text{Tobin}} \frac{\left|\pi^\star_{\text{Tang}} \cdot m - R^0\right|}{\sqrt{\pi^{\star\top}_{\text{Tang}} \Sigma \pi^\star_{\text{Tang}}}}.$$

Dabei bezeichnet Σ ist die Kovarianzmatrix der risikobehafteten Anlagen aus Teil a), m den Vektor der zugehörigen erwarteten Renditen und

$$\pi^{\star}_{\text{Tang}} = \frac{\Sigma^{-1}\left(m - R^0 m\right)}{A - R^0 C}$$

ist das Tangentialportfolio, wobei

$$A := m^{\top}\Sigma^{-1}e, \quad C := e^{\top}\Sigma^{-1}e.$$

Weiterhin bezeichnet m_p die erwartete Rendite des hier optimalen Portfolios in Abhängigkeit der gewählten Varianz σ_{Tobin}. Jedes Portfolio auf der Kapitalmarktlinie kann als Kombination aus dem Tangentialportfolio und der risikolosen Anlage konstruiert werden. Wir bestimmen ein Portfolio mit einer erwarteten Rendite von 20 % sowie dessen Standardabweichung. Dazu berechnen wir zunächst die Teilterme:

$$\begin{aligned}
&\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{9}{100} & 0 \\ 0 & \frac{1}{100} \end{pmatrix}, \quad \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \\
&R^0 = \frac{1}{10}, \quad m = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{20} \end{pmatrix}, \\
&A = \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{20}\right) \begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{160}{9}, \quad C = \frac{100}{9} + 100 = \frac{1000}{9}, \\
&\pi^{\star}_{\text{Tang}} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{100}{9} & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \\ \frac{2}{20} - \frac{1}{10} \end{pmatrix}}{\frac{160}{9} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1000}{9}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Struktur des Tangentialportfolios ist also, ein Viertel des riskant investierten Kapitals im ersten Papier anzulegen und die restlichen drei Viertel im zweiten Papier. Zu klären bleibt, welcher Anteil des Vermögens überhaupt in riskante Anlagen fließen soll. Bezeichne den riskant investierten Anteil mit α. Dann muss bei Investition gemäß dem Tangentialportfolio gelten:

$$\begin{aligned}
0{,}2 &\overset{!}{=} \mathbb{E}\left[\alpha R^{\pi^{\star}_{\text{Tang}}} + (1-\alpha)R^0\right] \\
&= \alpha\pi^{\star}_{\text{Tang}} \cdot m + (1-\alpha)R^0 \\
&= \frac{7}{40}\alpha + \frac{1}{10}(1-\alpha) \quad \Longleftrightarrow \\
\alpha &= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Also verkaufe die risikolose Anlage in von ein Drittel des Kapitals leer und investiere vier Drittel des Kapitals in das Tangentialportfolio. Die Varianz des Gesamtportfolios ist dann

$$\alpha^2 \text{Var}(R^{\pi^{\star}_{\text{Tang}}}) = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{9}{100} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{100}\right) = \frac{1}{50},$$

also ergibt sich eine Standardabweichung von $\frac{1}{5\sqrt{2}}$.