# Lösungsblatt 13

### Aufgabe 1 (Minimum-Varianz-Portfolio und Tangentialportfolio)

Betrachten Sie ein Portfolio aus zwei Aktien $A$ und $B$ wie in der Tabelle unten angegeben. Die Aktien seien korreliert mit Korrelationskoeffizient $\rho = \frac{1}{3}$.

| | Anzahl der Aktien | Preis pro Aktie | Erwartete Rendite | Standardabw. Rendite |
|---|---|---|---|---|
| Aktie A | 100 | 1,50 € | 15 % | 15 % |
| Aktie B | 150 | 2 € | 12 % | 9 % |

a) Bestimmen Sie das Minimum-Varianz-Portfolio und die zugehörige minimale Varianz und erwartete Rendite.

b) Angenommen, es gibt ein weiteres risikoloses Wertpapier und das Portfolio in der Tabelle ist das Tangentialportfolio. Welche Rendite hat das risikolose Wertpapier?

**Lösungsvorschlag:**
Gegeben sind zwei Aktien mit erwarteten Renditen $m_1 = 0{,}15$ bzw. $m_2 = 0{,}12$ und Standardabweichung $\sigma_1 = 0{,}15$ bzw. $\sigma_2 = 0{,}09$. Die Aktien sind korreliert mit Korrelationskoeffizienten $\rho = \frac{1}{3}$.

a) Mit der Bezeichnung

$$C := e^\top \Sigma^{-1} e$$

ergibt sich laut Vorlesung das Minimum-Varianz-Portfolio (MVP) durch

$$\pi^\star_{\text{MVP}} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1} e.$$

Da $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}$ folgt

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}09 = \frac{45}{10000}.$$

Die Kovarianzmatrix ist somit

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10000}\begin{pmatrix} 225 & 45 \\ 45 & 81 \end{pmatrix}$$

und die Inverse

$$\Sigma^{-1} = \frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81 & -45 \\ -45 & 225 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$C = \frac{100}{162}(81 - 2 \cdot 45 + 225) = \frac{400}{3}$$

und

$$\pi^\star_{\text{MVP}} = \frac{3}{400} \cdot \frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81 & -45 \\ -45 & 225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{216}\begin{pmatrix} 36 \\ 180 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)^\top.$$

Die zugehörige erwartete Rendite und Varianz sind

$$\mathbb{E}[R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}] = \pi^\star_{\text{MVP}} \cdot m = \frac{1}{6} \cdot 0{,}15 + \frac{5}{6} \cdot 0{,}12 = \frac{1}{8}, \quad \text{Var}(R^{\pi^\star_{\text{MVP}}}) = \frac{1}{C} = \frac{3}{400}.$$

b) Wir bestimmen zunächst die Portfoliogewichte. Der Wert des Gesamtportfolios ist 450 €. Die Gewichte der beiden Aktien sind $\frac{150}{450}$ bzw. $\frac{300}{450}$. Das gegebene Portfolio in der Tabelle ist nach Annahme das Tangentialportfolio, d. h.

$$\pi^\star_{\text{Tang}} = \left(\frac{150}{450}, \frac{300}{450}\right)^\top = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^\top.$$

Das Tangentialportfolio bestimmt sich laut Vorlesung durch

$$\pi^\star_{\text{Tang}} = \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{A - R^0 C},$$

wobei

$$A := m^\top \Sigma^{-1} e.$$

Setzen wir die gegebenen Größen ein, so ergibt sich

$$A = (0{,}15, 0{,}12)\frac{100}{162}\begin{pmatrix} 36 \\ 180 \end{pmatrix} = \frac{50}{3},$$

$$A - R^0 C = \frac{50 - 400R^0}{3}$$

und

$$\Sigma^{-1}(m - R^0 e) = \frac{100}{162}\begin{pmatrix} 81 & -45 \\ -45 & 225 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}15 - R^0 \\ 0{,}12 - R^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{6} - \frac{200}{9}R^0 \\ \frac{25}{2} - \frac{1000}{9}R^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{75-400R^0}{18} \\ \frac{225-2000R^0}{18} \end{pmatrix}.$$

Also

$$\pi^\star_{\text{Tang}} = \frac{\Sigma^{-1}(m - R^0 e)}{A - R^0 C} \iff$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{3}{50 - 400R^0}\begin{pmatrix} \frac{75-400R^0}{18} \\ \frac{225-2000R^0}{18} \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= \frac{1}{50 - 400R^0} \cdot \frac{75 - 400R^0}{6} \iff \\ 100 - 800R^0 &= 75 - 400R^0 \iff \\ 25 &= 400R^0 \iff \\ R^0 &= \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Zur Probe setzen wir $R^0$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$\frac{3}{50 - 400 \cdot \frac{1}{16}} \cdot \frac{225 - 2000 \cdot \frac{1}{16}}{18} = \frac{3}{25} \cdot \frac{100}{18} = \frac{2}{3}.$$

Die Rendite des risikolosen Wertpapiers beträgt also 6,25 %.

**Aufgabe 2 (Holländisches Risikomaß)**

Für eine Zufallsvariable $X \in L^1$ ist das *holländische Risikomaß* durch

$$\rho(X) := -\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[-\min\{0, X - \mathbb{E}[X]\}\right]$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\rho$ ein monetäres Risikomaß ist.

b) Zeigen Sie, dass $\rho$ zudem kohärent ist.

**Lösungsvorschlag:**

a) Gemäß der Definition eines monetären Risikomaßes müssen die beiden Eigenschaften

 (i) Monotonie: Falls $X \leqslant Y$, dann gilt $\rho(X) \geqslant \rho(Y)$

 (ii) Translationsinvarianz: Für $m \in \mathbb{R}$ gilt: $\rho(X+m) = \rho(X) - m$

geprüft werden. Wir halten dazu fest, dass gilt:

$$\begin{aligned}\rho(X) &= -\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[-\min\{0, X - \mathbb{E}[X]\}\right] \\ &= -\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X] + \min\{0, X - \mathbb{E}[X]\}\right] \\ &= -\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}[X], X\}\right].\end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir mit Hilfe dieser Darstellung die Eigenschaften (i) und (ii) prüfen:

 (i) Seien $X, Y \in L^1$ mit $X \leqslant Y$. Dann ergibt sich:

$$\min\{\mathbb{E}[X], X\} \leqslant \min\{\mathbb{E}[Y], Y\}.$$

 Somit gilt

$$\rho(X) \geqslant \rho(Y),$$

 $\rho$ ist also monoton.

 (ii) Seien $X \in L^1$ und $m \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\rho(X+m) = -\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}[X+m], X+m\}\right] = -\left(\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}[X], X\}\right] + m\right) = \rho(X) - m.$$

 Somit ist $\rho$ ebenfalls translationsinvariant und daher ein monetäres Risikomaß.

b) Um die Kohärenz von $\rho$ zu zeigen, muss gezeigt werden, dass $\rho$

 (i) positiv homogen

 (ii) konvex

ist. Wir werden zuerst die positive Homogenität zeigen. Da ein positiv homogenes Risikomaß genau dann konvex ist, wenn es subadditiv ist, werden wir anschließend die Subadditivität zeigen.

 (i) Das monetäre Risikomaß $\rho$ ist positiv homogen, denn es gilt:

$$\rho(\lambda X) = -\mathbb{E}\left[\min\{\mathbb{E}[\lambda X], \lambda X\}\right] = \lambda\rho(X), \quad \lambda > 0.$$

 (ii) Wir zeigen, dass das monetäre Risikomaß $\rho$ subadditiv ist. Da

$$\min\{\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y], X + Y\} \geqslant \min\{\mathbb{E}[X], X\} + \min\{\mathbb{E}[Y], Y\}$$

 nach Definition des Minimums gilt, folgt direkt:

$$\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y).$$

Somit ist das positiv homogene, monetäre Risikomaß $\rho$ subadditiv und damit insbesondere konvex. Also ist $\rho$ ein kohärentes Risikomaß.

**Aufgabe 3 (Distorsionsrisikomaß)**

Es sei $X \in L^1_+ := \{Y \in L^1 | Y \geqslant 0\}$ eine Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X] < \infty$. Weiter sei $\rho : L^1_+ \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\rho(X) := -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(X > x))\mathrm{d}x,$$

wobei $g : [0,1] \to [0,1]$ eine monoton wachsende Funktion mit $g(0) = 0$ und $g(1) = 1$ sei. Zeigen Sie, dass $\rho$ ein monotones, translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß ist.

**Lösungsvorschlag:**

- *Monotonie:* Es sei $X \leqslant Y$. Dann gilt offenbar $\mathbb{P}(X > x) \leqslant \mathbb{P}(Y > x)$. Da $g$ monoton wachsend ist, folgt $g(\mathbb{P}(X > x)) \leqslant g(\mathbb{P}(Y > x))$ und damit nach Definition von $\rho(X)$ mit der Monotonie des Integrals sofort $\rho(X) \geqslant \rho(Y)$.
- *Translationsinvarianz:* Sei $c \in \mathbb{R}_+$ Es gilt

  $$\rho(X+c) = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(X+c > x))\mathrm{d}x = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(X > x-c))\mathrm{d}x.$$

  Substituieren wir nun $x - c$ durch $y$ so erhalten wir

  $$\rho(X+c) = -\int_{-c}^\infty g(\mathbb{P}(X > y))\mathrm{d}y = -\int_{-c}^0 g(\mathbb{P}(X > y))\mathrm{d}y - \int_0^\infty g(\mathbb{P}(X > y))\mathrm{d}y.$$

  Für $x < 0$ ist natürlich $\mathbb{P}(X > x) = 1$ und damit auch $g(\mathbb{P}(X > x)) = 1$, sodass wir erhalten

  $$\rho(X+c) = -\int_{-c}^0 1\mathrm{d}y + \rho(X) = \rho(X) - c.$$

- *Positive Homogenität:* Sei $\alpha > 0$. Dann gilt

  $$\rho(\alpha X) = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(\alpha X > x))\mathrm{d}x = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(X > \frac{x}{\alpha}))\mathrm{d}x.$$

  Wir substituieren nun $\frac{x}{\alpha}$ mit $y$, also $\mathrm{d}x$ mit $\alpha\mathrm{d}y$, und erhalten

  $$\rho(\alpha X) = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(X > y))\alpha\mathrm{d}y = \alpha\rho(X).$$

  Sein nun $\alpha = 0$. Dann gilt $\rho(\alpha X) = \rho(0) = -\int_0^\infty g(\mathbb{P}(0 > x))\mathrm{d}x = 0 = \alpha\rho(X)$, da $\mathbb{P}(0 > x)$ für alle $x \geqslant 0$ gleich 0 ist.

**Aufgabe 4 (VaR und AVaR bei Exponentialverteilung)**

Berechnen Sie für $\lambda \in (0,1)$ den $\mathrm{VaR}_\lambda$ und den $\mathrm{AVaR}_\lambda$ einer exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\beta > 0$.

**Lösungsvorschlag:**
Sei $X$ exponentialverteilt zum Parameter $\beta > 0$. Für $x \in \mathbb{R}$ ist dann

$$F_X(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,(1 - \exp(-\beta x))$$

die zugehörige Verteilungsfunktion. Offensichtlich ist die Verteilungsfunktion $F_X$ strikt wachsend auf dem Intervall $(0,\infty)$. In diesem Fall gilt also $q_X^+(\lambda) = q_X^-(\lambda) = F_X^{-1}(\lambda)$. Beachte hierbei, dass $0 < \lambda < 1$ gefordert war. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda &= F_X(x) = 1 - \exp(-\beta x) \quad \Longleftrightarrow \\ x &= -\frac{1}{\beta}\log(1-\lambda), \end{aligned}$$

also folgt

$$\mathrm{VaR}_\lambda(X) = -q_X^+(\lambda) = -q_X^-(\lambda) = -F_X^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\beta}\log(1-\lambda).$$

Damit gilt für den AVaR

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{VaR}_\gamma(X)d\gamma = \frac{1}{\beta\lambda}\int_0^\lambda \log(1-\gamma)d\gamma.$$

Mit der Substitution $1-\gamma = t$, $d\gamma = -dt$ folgt

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(X) = -\frac{1}{\beta\lambda}\int_1^{1-\lambda}\log(t)dt = -\frac{1}{\beta\lambda}\; t(\log(t)-1)|_1^{1-\lambda} = \frac{\lambda\log(1-\lambda) - \log(1-\lambda) - \lambda}{\beta\lambda}.$$