0.1 Holomorphie herausfinden

Cauchy-Riemannsche-DGL

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \qquad -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Wirtinger Kalkül

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

0.2 Was Holomorphie bedeutet

Gebietstreue Ist f nicht konstant und auf G holomorph, so ist $f(G)$ wieder ein Gebiet.

Maximumsprinzip Sei f auf G (beschränktes Gebiet) holomorph und nicht konstant. Dann hat $|f|$ auf G kein lokales Maximum (also auf dem Rand von G).

Minimumsprinzip Hat f in G ein lokales Minima, so ist f dort entweder Null oder f ist konstant.

Potenzreihenentwicklung f lässt sich (eindeutig) als Potenzreihe um z_0 darstellen, welche in der größten Kreisscheibe konvergiert, auf der f holomorph ist. Es gilt für die Glieder a_n:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{dw}$$

Der Konvergenzradius ergibt sich über

$$R = \lim \sup^{-1} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim^{-1} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Laurentreihenentwicklung f lässt sich (eindeutig) als Potenzreihe um z_0 darstellen, welche im größten Kreisring mit Radien $r < s$ konvergiert, auf der f holomorph ist. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{dw}$$

Der Entwicklungspunkt ist eine hebbare Singularität, falls alle a_n für negative n verschwinden und ein Pol vom Grad m, wenn alle a_n mit $n < -m$ verschwinden. Ansonsten ist c eine wesentliche Singularität.

Beispiel Für

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

ist die Laurententwicklung um $z_0 = 0$ gegeben durch

$$\begin{array}{rl}
|z| < |a| & \displaystyle\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}}\right) z^n \\
|a| < |z| < |b| & \displaystyle\frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^{n-1}}{z^n} + \frac{z^{n-1}}{b^n}\right) \\
|b| < |z| & \displaystyle\frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^{n-1}}{z^n} - \frac{b^{n-1}}{z^n}\right)
\end{array}$$

Logarithmus Es ist der komplexe Logarithmus definiert als

$$\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$$

und die Potenzreihenentwicklung für $|z-1| < 1$

$$\log(z) = \sum (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

Satz von Roche Ist $|f(z)| < |g(z)|$ für alle z auf einen geschlossenen nullhomologen Weg γ, so gilt im Inneren von γ, dass g und $f+g$ gleich viele Nullstellen haben.

Satz von Liouville Jede beschränkte ganze Funktion f ist konstant.

Komplexe Differenzierbarkeit Jede holomorphe Funktion ist unendlich oft komplex differenzierbar.

Identitätssatz Sind f und g identisch in einer Menge mit Häufungspunkt (oder alle Ableitungen sind an einen Punkt gleich), dann ist auch $f = g$.

Konforme Abbildungen Holomorphe Abbildungen mit $f'(z) \neq 0$ sind konform (Winkelerhaltend)

Schwarz'sches Lemma Ist f eine holomorphe Funktion auf der Einheitskreisscheibe mit $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ so gilt

$$|f(z)| \leq |z| \qquad |f'(0)| \leq 1$$

0.3 Integrale berechnen

Direkte Berechnung

$$\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = \int f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{dt}$$

Cauchyscher Integralsatz für Sterngebiete Sei $G \in \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f \in H(G)$. Dann

- f hat auf G eine Stammfunktion
- Sei γ ein stückweise glatter Weg mit Träger in G. Dann ist $\int_\gamma f(z)\ \mathrm{dz} = F(\gamma(0)) = F(\gamma(1))$

Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben D sei offen und $f \in H(D)$. Seien $z_0 \in D$ und $\overline{B(z_0, r)} \subset D$. Dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\ \mathrm{dw}$$

Cauchysche Integralformel Sei M eine offene Menge und $f \in H(M)$. Dann ist

$$f(z)n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\ \mathrm{dw}$$

wenn n die Umlaufzahl und γ geschlossen ist.

Mittelwertungleichung

$$|f(c)| \leq |f|_{\partial B}$$

Parsevalsche Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2\ \mathrm{dt} = \sum |a_n|^2 r^{2n}$$

0.4 Residuen

Rechenregeln

$$\mathrm{res}_c(f) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\ \mathrm{dz}$$

Wenn c ein Pol der Ordnung m ist:

$$\mathrm{res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}(z-c)^m f(z)$$

Wenn g und h holomorph sind mit $g(c) \neq 0, h'(c) \neq 0, h(c) = 0$ folgt

$$\mathrm{res}_c(g/h) = g(c)/h'(c)$$

Ist m die Ordnung der Nullstelle, so ist

$$\mathrm{res}_c(f'/f) = m$$

Residuenformel Ist γ ein geschlossener Weg in D, dann

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma h(z)\ \mathrm{dz} = \sum \mathrm{ind}(c) \cdot \mathrm{res}(h)$$

Uneigentliche Integrale Wenn $f = P/Q$ zu integrieren ist und

- Q keine reellen Nullstellen hat
- der Grad von Q mindestens 2 größer ist als der von P

dann lässt sich das Integral über alle Residuen von P/Q in der oberen Halbebene berechnen.

Uneigentliche Integrale II Wenn $f = e^{iax}P/Q$ zu integrieren ist und

- Q keine reellen Nullstellen hat
- der Grad von Q größer ist als der von P

dann lässt sich das Integral über alle Residuen von $e^{iax}P/Q$ in der oberen Halbebene berechnen.

0.5 Möbiustransformationen

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Kreistreue, Gebietstreue, Winkeltreue Jede Möbiustransformation ist kreistreu. Der Schnittwinkel zwischen zwei verallgemeinerten Kreisen bleibt erhalten. Die Orientierung bleibt erhalten.

Fixpunktsatz Eine Möbiustransformation mit mehr als zwei Fixpunkten ist die Identität.

Doppelverhältnis Jede Möbiustransformation lässt das Doppelverhältnis (z, z_1, z_2, z_3) konstant

$$\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

Das Doppelverhältnis ist genau dann reell, wenn die vier Punkte auf einem verallgemeinerten Kreis liegen.

Inversion Für T ist

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$$

die Inversion.

0.6 Wahr - falsch

- Ist f und g holomorph und $f \cdot g = 0$, dann ist f oder g konstant (und eins ist gleich Null). Aber nicht bei $f \cdot g = 1$ oder sowas.
- Es gibt keine holomorphe Funktion $f : E \to \mathbb{C}$ mit Bild $f = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (da diese Menge nicht offen ist; Gebietstreue).
- Jede ganze Funktion lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, die überall konvergiert.
- Wenn f holomorph ist muss 0 nicht unbedingt ein Pol von $f(z)/z$ sein.
- Die Menge der c-Stellen einer nichtkonstanten holomorphen Funktion f ist höchstens abzählbar. Aber die Unendlichkeit reicht nicht aus, damit die Funktion konstant ist.
- Die Funktion $\sin\cdot$ ist auf $\mathbb{C}$ nicht beschränkt.
- Für den Integralsatz muss das Gebiet ein Elementargebiet (Sterngebiet) sein.
- Jede in einem Punkt holomorphe Funktion ist dort unendlich oft komplex differenzierbar.