Funktionentheorie - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

1 Komplexe Differenzierbarkeit

komplex differenzierbare Funktion $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D^0$: $f : D \to \mathbb{C}$ in z_0 kd, wenn:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad \text{existiert, d.h. in } \varepsilon\text{-Formulierung:}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in D : 0 < |z - z_0| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

f kd. $\Rightarrow$ f stetig; Zusammensetzungen kd. Fkt. sind kd.

holomorphe Funktion $D \subset \mathbb{C}$ offen: $f : D \to \mathbb{C}$ in z_0 holomorph, wenn f in einer Umgebung von z_0 kd. ist. f holomorph in D, wenn f in jedem $z_0 \in D$ kd. ist.

$$H(D) := \{ f : D \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist holomorph in } D \}$$

Cauchy-Riemannsche-DGL (CRD) $D \subset \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ in z_0 kd. gdw. $u, v : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ diffbar, und für $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ gelten die CRD: (Notation: $f_\alpha = \partial_\alpha f$)

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad ; \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

In diesem Fall gilt:

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

2 Potenzreihen

Potenzreihe $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Satz von Cauchy-Hadamard Für den Konvergenzradius (KR) $R = \left[\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right]^{-1}$ gilt:
PR absolut konv. für $|z - z_0| < R$ (und $f \in H(K(z_0, R))$ holom.) und divergent für $|z - z_0| > R$.
Sie konv. gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $\overline{K(z_0, r)}$ mit $0 < r < R$.

Darstellung der PR-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

Satz von Abel $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ fallende Nullfolge. Dann konv. die PR für $|z| \leq 1$, $z \neq 1$ (KR $R \geq 1$).

3 Stammfunktionen

Stammfunktion $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$: $F \in H(\Omega)$, $F'(z) = f(z) \; \forall z \in \Omega$ ist SF von f auf Ω.

Gebiet offene, zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$

konstante Funktion $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$, $f'(z) = 0 \; \forall z \in \Omega$: Dann ist $f = \text{const.}$ auf Ω.
SF auf einem Gebiet unterscheiden sich daher nur durch eine (additive) Konstante.

4 Die Funktionen e^z, $\log z$, z^α

Exponential-Funktion $\exp \in H(\mathbb{C})$

$$e^z := \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sinus und Cosinus $\sin, \cos \in H(\mathbb{C})$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Rechenregeln, Zusammenhänge $a, b, z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$e^a e^b = e^{a+b} \;\; ; \;\; e^{x+iy} = e^x \left[\cos y + i \sin y\right] \;\; ; \;\; |e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \;\; ; \;\; e^{iz} = \cos z + i \sin z \;\; ; \;\; e^z \neq 0$$

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \;\; ; \;\; \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) \;\; ; \;\; \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \;\; ; \;\; \tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \text{ (für } \cos z \neq 0)$$

Injektive exp-Funktion Auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z| < \pi\}$ ist e^z injektiv und $\exp(G) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Logarithmus Umkehrfunktion von exp: Logarithmus $\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$, $\log \in H(\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$

$$\log z := \log |z| + i \arg z \;\; ; \;\; \log' z = \frac{1}{z} \;\forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Bem.: Gibt mehrere Logarithmen, dieser ist der Hauptwert des Logarithmus. (je nach Wahl von arg)

Argument-Funktion hier der Hauptwert, d.h. $\arg z \in (-\pi, \pi] \;\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r > 0, \varphi \in (-\pi, \pi] : \; \arg z = \varphi \quad \text{d.h.} \quad z = |z| e^{i \arg(z)} \;\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Potenzen komplexer Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$: $z^\alpha = e^{\alpha \log(z)}$
Wichtig: Beachten, dass der Hauptwert(Winkelbereich!) berechnet werden muss, d.h. i.A. $(e^a)^b \neq e^{ab}$.

5 Das Wegintegral

Weg stetige Abbildung $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$; **geschlossener Weg** falls $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$; **Träger** $\gamma^* := \gamma([\alpha, \beta])$

Wegintegral γ stückweise stetig diffbar. (ssd.) Weg, $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \int_\alpha^\beta f(\gamma(t)) \gamma'(t)\, dt$$

Länge eines Weges $L(\gamma) := \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt$

Äquivalenz von Wegen γ_1 und γ_2 zwei ssd. Wege mit $\gamma_1^* = \gamma_2^*$.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \quad \forall f : \gamma_1^* \to \mathbb{C} \quad \text{stetig}$$

Insb. kann man $[\alpha, \beta]$ bijektiv auf $[0, 1]$ abbilden, d.h. sei im Folgenden oBdA. $\alpha = 0$ und $\beta = 1$.

Umkehrung von Wegen $\gamma_- : [0, 1] \to \mathbb{C}, \gamma_-(t) = \gamma(1 - t)$

$$\int_{\gamma_-} f(z) dz = - \int_\gamma f(z) dz$$

Vereinigung von Wegen γ_1, γ_2 ssd. Wege mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$: Definiere Aneinanderreihung $\gamma := \gamma_1 \oplus \gamma_2$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

Abschätzung für ssd. Wege $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ stetig

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \|f\|_\infty \cdot L(\gamma) \qquad \text{mit } \|f\|_\infty = \max_{z\in\gamma^*} |f(z)|$$

Gerade Wege zwischen zwei Punkten $a, b \in \mathbb{C}$: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}, \gamma(t) := a(1-t) + bt$

$$\int_{[a,b]} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz$$

Aufgrund der Äquiv. von Wegen, hängt $\int_{[a,b]}$ nicht von einer speziellen Parametrisierung der Strecke ab.

Dreieck $\Delta = \Delta(a, b, c)$ für $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Definieren Integral entlang des Randes $\partial\Delta$:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz := \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[b,c]} f(z)dz + \int_{[c,a]} f(z)dz$$

Index bzw. Umlaufzahl $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ ssd. geschl. Weg. $\Omega := \mathbb{C} \setminus \gamma^*$: $\text{ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{Z}$

$$\text{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \qquad \forall z \in \Omega$$

$\text{ind}_\gamma = 0$ auf der unbeschränkten Zhg.komp. von Ω; $\text{ind}_\gamma = \text{const.}$ auf jeder Zhg.komp. von Ω.

Rechte-Hand-Regel (Eigenkreation) Daumen in Wegrichtung; Zeigefinger in Überquerungsrichtung des Weges $\Rightarrow$ Mittelfinger: Nach Oben: Index eins erhöhen; Nach unten: Index eins erniedrigen

6 Der Cauchysche Integralsatz für konvexe Mengen

Lemma von Goursat $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Delta = \Delta(a, b, c) \subset \Omega$, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

CIS für konvexe Mengen $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $p \in \Omega$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig, $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$

$$\exists F \in H(\Omega) : F'(z) = f(z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Insb. gilt für jeden ssd. geschl. Weg γ in Ω:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

(Bem.: Wegen $F \in H(\Omega)$ exist. holom. Fortsetzung $\tilde{f} \in H(\Omega)$ von f und da f stetig auf Ω: $f \equiv \tilde{f}$)

CIF für konvexe Mengen (**F**ormel) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $f \in H(\Omega)$, γ ssd. geschl. Weg in Ω

$$f(z) \cdot \text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \forall z \in \Omega \setminus \gamma^*$$

Potenzreihenentwicklung $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, $R > 0$

$$K(z_0, R) \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad f \text{ auf } K(z_0, R) \text{ durch PR mit KR } \geq R \text{ darstellbar.}$$

Holomorphe Ableitungen $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$: $f^{(n)} \in H(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Satz von Morera (Umkehrung des CIS) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ stetig

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0 \ \ \forall \Delta \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad f \in H(\Omega)$$

7 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Nullstellenmenge $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$: $Z(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$

$$Z(f) = \Omega \quad \text{oder} \quad Z(f) \text{ hat keinen Häufungspunkt (HP) in } \Omega \text{ und ist höchstens abzählbar}$$

isolierte Nullstelle $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$, $Z(f) \neq \Omega$ (d.h. $Z(f)$ hat kein HP $\to$ isolierte NS)

$$\forall a \in Z(f) \ \exists_1 m = m(a) \in \mathbb{N} : \exists g \in H(\Omega) \text{ mit } g(a) \neq 0 \text{ und } f(z) = (z-a)^m g(z) \ \ \forall z \in \Omega$$

m heißt Ordnung der NS a von f.

Identitätssatz $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f, g \in H(\Omega)$

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\} \text{ hat einen HP in } \Omega \quad \Rightarrow \quad f = g$$

Isolierte Singularität $a \in \Omega$: $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$

Hebbare Singularität Sing. a ist hebbar, falls f zu einer Fkt. aus $H(\Omega)$ fortgesetzt werden kann.

Riemannscher Hebbarkeitssatz $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$

$$\exists r > 0 : f \text{ auf } K(a,r) \setminus \{a\} \text{ beschränkt} \quad \Rightarrow \quad a \text{ ist hebbare Singularität}$$

Klassifikation isolierter Singularitäten $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Dann entweder:

- **Hebbare Singularität**: f hat in a eine hebbare Singularität
- **Pol m-ter Ordnung**: Es gibt $m \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ mit $c_m \neq 0$:

$$f(z) - \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}}_{\text{Hauptteil von } f \text{ in } a} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \quad \text{hat in } a \text{ eine hebbare Singularität}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \neq 0 \text{ existiert}$$

- **Wesentliche Singularität**: **Satz von Casorati-Weierstraß**:

$$K(a,r) \subset \Omega \quad \Rightarrow \quad f(K(a,r) \setminus \{a\}) \text{ dicht in } \mathbb{C}$$

CIF für Ableitungen $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und konvex, $f \in H(\Omega)$, γ ssd. geschl. Weg in Ω

$$f^{(n)}(z) \cdot \mathrm{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Cauchysche Ungleichung $f \in H(K(z_0, R))$

$$|f(z)| \leq M \ \ \forall z \in K(z_0, R) \quad \Rightarrow \quad \left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n! M}{R^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f \in H(\mathbb{C})$

Satz von Liouville Ist $f \in H(\mathbb{C})$ beschränkt, so ist f konstant.

Hauptsatz der Algebra $n \in \mathbb{N}$, $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann hat p genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$ $z_1, \ldots, z_n$ (Summe der Ordnungen ist n) und es gilt:

$$p(z) = (z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$$

Satz von der Gebietstreue $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$. Dann: $f(\Omega)$ ist ein Gebiet oder $f = \text{const.}$

Maximumsprinzip $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$

- $|f|$ hat in Ω ein lokales Maximum $\Rightarrow$ $f = \text{const.}$
- $|f|$ hat in Ω ein lokales Minimum und $f(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$ $\Rightarrow$ $f = \text{const.}$
- Ω beschränkt, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig, dann nimmt $|f|$ sein Maximum auf dem Rand von Ω an:

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|$$

Bemerkung zum Maximumsprinzip Ω Gebiet, $f \in H(\Omega)$, $\overline{K(a,r)} \subset \Omega$

$$|f(a)| \leq \max_{t \in [0,2\pi]} \left| f(a + re^{it}) \right| \qquad \text{mit Gleichheit gdw. } f = \text{const. auf } \Omega$$

Schwarzsches Lemma $f \in H(K(0,1))$, $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ für $z \in K(0,1)$

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für } z \in K(0,1) \quad ; \quad |f'(0)| \leq 1$$

Weiter gilt: $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in K(0,1) \setminus \{0\}$ gdw. $f(z) = cz$ mit $|c| = 1$ gdw. $|f'(0)| = 1$.

8 Das lokale Abbildungsverhalten

Satz zur Umkehrfunktion $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $f'(z_0) \neq 0$. Dann $\exists V := K(z_0, r) \subset \Omega$:

- f ist injektiv auf V
- $W := f(V)$ ist ein Gebiet
- Die Umkehrfunktion $g = f^{-1} : W \to V$ von $f : V \to W$ ist in $H(W)$ und

$$g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$$

Schlichte Funktion $f \in H(\Omega)$ injektiv, $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet

Satz 8.3 $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$ nicht konst., $z_0 \in \Omega$ NS m-ter Ordnung von $f(z) - f(z_0)$

$$\exists U \subset \mathbb{C} \text{ offen mit } z_0 \in U,\ K(0,r) \text{ und eine holom. Fkt. } g : U \to K(0,r) \text{ mit:}$$

- $f(z) = f(z_0) + (g(z))^m$ für $z \in U$
- $g : U \to K(0,r)$ ist bijektiv
- $\forall w \in f(U) = K(f(z_0), r^m), w \neq f(z_0)$ gibt es genau m Urbilder $z_1, \ldots, z_m \in U$

Insb.: Ist $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f \in H(\Omega)$ injektiv, so ist $f'(z) \neq 0$ für $z \in \Omega$

Schlichtheitskriterium $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, konvex, $f \in H(\Omega)$ und $\mathrm{Re} f'(z) > 0$ für $z \in \Omega$ $\Rightarrow$ f schlicht.
Bem.: Analoges gilt falls $\mathrm{Re} f'(z) < 0$, $\mathrm{Im} f'(z) > 0$, $\mathrm{Im} f'(z) < 0$ jeweils für alle $z \in \Omega$.

9 Folgen holomorpher Funktionen

$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $(f_n) \subset H(\Omega)$

Kompakte Konvergenz von (f_n) gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$\forall K \subset \Omega \text{ kompakt } \forall \epsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(K, \epsilon) : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon \text{ für } z \in K, n \geq n_0$$

Konvergenzsatz von Weierstraß $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, (f_n) Folge in $H(\Omega)$ konv. kpt. gegen $f : \Omega \to \mathbb{C}$

$$f \in H(\Omega) \text{ und } (f'_n) \text{ konv. kpt. gegen } f'$$

Bem.: Somit folgt: $\forall k \in \mathbb{N} : f_n^{(k)} \xrightarrow{kpt.} f^{(k)}$, $n \to \infty$
Insb konv. Partialsummen der PR innerhalb des KR komp. gegen die PR.

10 Der globale Cauchysche Integralsatz

Kette $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ssd. Wege in $\mathbb{C}$, Kette $\Gamma := \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$, $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \ldots \cup \gamma_n^*$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)dz$$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $\Gamma^* \subset \Omega$: Dann heißt Γ Kette in Ω.

Umkehrung von Ketten Alle Wege γ_j in Γ durch $\gamma_{j,-}$ ersetzen: $\Gamma_- := \gamma_{1,-} \oplus \ldots \oplus \gamma_{n,-}$

$$\int_{\Gamma_-} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$$

Addition von Ketten Γ_1, Γ_2 Ketten: $\Gamma := \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz \quad \forall f \in C(\Gamma_1^* \cup \Gamma_2^*, \mathbb{C})$$

Gleichheit von Ketten Γ_1, Γ_2 heißen gleich, wenn $\Gamma_1^* = \Gamma_2^*$ und

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz \quad \forall f \in C(\Gamma_1^*, \mathbb{C})$$

Zykel Kette Γ, die Darstellung $\Gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$ besitzt, sodass alle γ_j geschl. sind.

Index eines Zykels $\Gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_n$ Zykel, $\alpha \notin \Gamma^*$

$$\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dz}{z - \alpha} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ind}_{\gamma_k}(\alpha)$$

Globaler CIS $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $f \in H(\Omega)$, Γ Zykel in Ω mit $\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ [1]

$$f(z) \cdot \operatorname{ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^* \quad \text{und} \quad \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Γ_1, Γ_2 Zykel in Ω, $\operatorname{ind}_{\Gamma_1}(\alpha) = \operatorname{ind}_{\Gamma_2}(\alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ [2]:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

Bemerkung: Ist Ω zusätzlich konvex, so gilt bereits für jeden Zykel Γ in Ω: $\operatorname{ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

[1] Bedingung, dass keine Löcher umlaufen werden; im CIS musste hierfür Ω konvex sein, denn dann gibt es keine Löcher.
[2] Hier ist es jetzt nur entscheidend, dass gleich viele Löcher in gleicher Orientierung umlaufen werden

Satz 10.2 $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ ssd. geschl. Wege, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |\alpha - \gamma_0(t)| \quad \forall t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

11 Der Residuensatz

Meromorphe Funktion $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. f meromorph auf Ω, falls $\exists A \subset \Omega$:

- A hat keinen HP in Ω
- $f \in H(\Omega \setminus A)$
- Jedes $a \in A$ ist ein Pol von f

Bem.: Da $A = \emptyset$ erlaubt ist, ist jedes $f \in H(\Omega)$ meromorph. Jede rationale Fkt. (Bruch zweier Polynome) ist meromorph., A ist höchstens abzählbar

Residuum von f in $a \in A$: $Q(z) = \sum_{k=1}^{m} c_k (z-a)^{-k}$ Hauptteil von f in a (siehe Singularitäten)

$$\mathrm{Res}(f, a) = c_1$$

Residuensatz $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, f meromorph auf Ω, A die Menge der Pole von f
Γ Zykel in $\Omega \setminus A$ mit $\mathrm{ind}_\Gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ [3]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \mathrm{Res}(f, a) \cdot \mathrm{ind}_\Gamma(a)$$

Argumentprinzip $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, γ ssd. geschl. Weg in Ω, $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, $\mathrm{ind}_\gamma(\alpha) \in \{0, 1\}$ für $\alpha \in \Omega \setminus \gamma^*$. Weiter $\Omega_1 := \{z \in \Omega : \mathrm{ind}_\gamma(z) = 1\}$. Für $f \in H(\Omega)$ sei $\mathcal{N}_f$ die Anzahl NS von f in Ω_1 einschließlich Vielfachheit.

$$f \in H(\Omega) \ , \ 0 \notin f(\gamma^*) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Bemerkung: Mit $\tilde{\gamma} := f \circ \gamma$ gilt:

$$\mathcal{N}_f = \mathrm{ind}_{\tilde{\gamma}}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{f(\gamma(t))} dt$$

Satz von Rouché Gleiche Voraussetzungen wie beim Argumentprinzip, $f, g \in H(\Omega)$

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma^* \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g$$

Satz von Hurwitz Ω Gebiet, $(f_n) \subset H(\Omega)$ Folge, $0 \notin f_n(\Omega) \ \forall n \in \mathbb{N}$, (f_n) konv. kpt. gegen $f \in H(\Omega)$

$$f(z) = 0 \ \ \forall z \in \Omega \quad \text{ oder } \quad 0 \notin f(\Omega)$$

12 Laurent-Reihen

Ringgebiet $K(z_0, r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ mit $0 \leq r < R \leq \infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$

Laurent-Reihe von f, $K(z_0, r, R)$ Ringgebiet, $f \in H(K(z_0, r, R))$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{Hauptteil von } f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in K(z_0, r, R)$$

Für die Koeffizienten gilt mit $r < \rho < R$ und $\gamma(t) := \rho e^{it} + z_0$ ($t \in [0, 2\pi]$):

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

[3] Stellt hier sicher, dass außer den Polen keine weiteren Löcher umlaufen werden, vgl. Globaler CIS

Isolierte Singularität in z_0, falls $r = 0$. Dann $\text{Res}(f, z_0) = a_{-1}$ [4]. Klassifikation:

- z_0 ist hebbar $\Leftrightarrow$ $a_n = 0$ für $n \leq -1$
- z_0 ist Pol m-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $a_{-m} \neq 0$, $a_n = 0$ für $n < -m$
- z_0 ist wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ $\{n \in \mathbb{Z} : n < 0, a_n \neq 0\}$ ist unendlich

Entwicklungssatz von Laurent $0 \leq r < R$, $f \in H(K(z_0, r, R))$

$$f \text{ eindeutig in Laurentreihe } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ entwickelbar.}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_n)^n \text{ konv. kpt. auf } K(z_0, R) \text{ und } \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n \text{ auf } \{z : |z - z_0| > r\}$$

Die Koeffizienten ergeben sich wie oben bereits aufgeführt.

Residuensatz (Version 2) $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, $A \subset \Omega$, A hat keine HP in Ω. $f \in H(\Omega \setminus A)$
Γ Zykel in $\Omega \setminus A$ mit $\text{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} \text{Res}(f, a) \cdot \text{ind}_\Gamma(a)$$

13 Einfach zusammenhängende Gebiete

Homotopie von Wegen $A \subset \mathbb{C}$, $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ geschl. Wege in A.
γ_0 und γ_1 homotop in A, falls ein stetiges $H : [0, 1]^2 \to A$ existiert mit:

- $H(s, 0) = \gamma_0(s), H(s, 1) = \gamma_1(s)$ für $s \in [0, 1]$
- $H(0, t) = H(1, t)$ für $t \in [0, 1]$

Nullhomotoper Weg Ein geschl. Weg, der homotop zu einem konstanten Weg (ein Punkt) ist.

Einfach zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, jeder geschl. Weg in Ω ist nullhomotop
Bem.: Ω offen und konvex $\Rightarrow$ Ω ezh. ; Ω ezh., $f \in H(\Omega)$ schlicht $\Rightarrow$ $f(\Omega)$ ezh.

Satz 13.1 $\Omega \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ssd. geschl. Wege in Ω, γ_0, γ_1 in Ω homotop

$$\text{ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{ind}_{\gamma_1}(\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

Bem.: Ist insb. Ω ezh., dann gilt für jeden ssd. geschl. Weg γ in Ω: $\text{ind}_\gamma(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Globaler CIS für ezh. Gebiete $\Omega \subset \mathbb{C}$ ezh. Gebiet, $f \in H(\Omega)$, γ ssd. geschl. Weg in Ω

$$f^{(n)}(z) \cdot \text{ind}_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \quad \forall z \in \Omega \setminus \gamma^*, n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \int_\gamma f(z) dz = 0$$

Satz zur Stammfunktion $\Omega \subset \mathbb{C}$ ezh. Gebiet, $f \in H(\Omega)$. Dann hat f eine SF auf Ω.

Satz zum holomorphen Logarithmus $\Omega \subset \mathbb{C}$ ezh. Gebiet, $f \in H(\Omega)$

$$0 \notin f(\Omega) \quad \Rightarrow \quad f \text{ hat einen holom. Logarithmus, d.h. } \exists g \in H(\Omega) : f(z) = e^{g(z)} \quad \forall z \in \Omega$$

14 Harmonische Funktionen

Nicht klausurrelevant. Törööö!

[4] Falls $r > 0$ existiert das Residuum nicht!