Lineare Algebra - Definitionen

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

1 Lineare Algebra I

1.1 Äquivalenzrelation $\sim$ (Def. 1.12)

- Reflexivität: $\forall x \in X : x \sim x$
- Symmetrie: $\forall x, y \in X : x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x$
- Transitivität: $\forall x, y, z \in X : x \sim y \wedge y \sim z \;\Rightarrow\; x \sim z$

1.2 Gruppe $(G, \cdot)$ (Def. 2.1)

- Nicht-leere Menge G
- Abgeschlossene Verknüpfung $\cdot : \forall a, b \in G : a \cdot b \in G$ (ggf. Wohldefiniertheit prüfen)
- Assoziativität: $\forall a, b, c \in G : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Neutrales Element (NE): $\exists e \in G : \forall a \in G : a \cdot e = e \cdot a = a$
- Inverses Element (IE): $\forall a \in G : \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$

- Kommutative oder abelsche Gruppe: $\forall a, b \in G : a \cdot b = b \cdot a$

1.3 Untergruppe $H \subset G$ (Def. 2.9)

- Nicht-leere Menge $H \subset G$
- Abgeschlossenheit: $\forall a, b \in H : a \cdot b \in H$
- Inverses Element: $\forall a \in H : a^{-1} \in H$

1.4 (Gruppen-)Homomorphismus $f : G \to G'$ (Def. 2.7)

- Zwei Gruppen $(G, \cdot)$ und $(G', *)$
- Linearität: $\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) * f(h)$

- Endomorphismus, wenn: $G = G'$, d.h. $f : G \to G$
- Isomorphismus, wenn: bijektiver Homomorphismus: $f : G \xrightarrow{\cong} G'$
- Automorphismus, wenn $G = G'$ und Isomorphismus: $f : G \xrightarrow{\cong} G$
- Kern eines Homomorphismus: $\ker(f) := f^{-1}(\{e_{G'}\}) = \{g \in G | f(g) = e_{G'}\}$
- injektiver Homomorphismus $f \iff \ker(f) = e_G$ (trivialer Kern")

1.5 Symmetrische Gruppe S_n (Def. 2.5)

- $S_n := Bij(\{1, \ldots n\}, \{1, \ldots n\}) = \{f : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots n\} |$ f bij. Abb. $\}$

- Permutation $\sigma \in S_n$
- Transposition $\tau(ij)$ vertauscht die zwei Zahlen i und j, lässt den Rest unverändert
- Fehlstand: $i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$
- Fehlstandszahl von $\sigma \in S_n$: $a(\sigma) := |\{(i, j) \in \{1, \ldots n\}^2$ Fehlstand $\}|$
- Signum $sign : S_n \to \{1, -1\}, \sigma \mapsto (-1)^{a(\sigma)}$

1.6 Ring $(R, +, \cdot)$ (Def. 2.24)

- Nicht-leere Menge R
- Zwei abgeschl. Verknüpfungen + (Addition), $\cdot$ (Multiplikation): $\forall a, b \in R : a + b \in R \wedge a \cdot b \in R$
- Abelsche Gruppe $(R, +)$
- Assoziativität von $\cdot$: $\forall a, b, c \in R : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Neutrales Element (NE): $\exists e \in R : \forall a \in R : a \cdot e = e \cdot a = a$

- Kommutativer Ring: $\cdot$ kommutativ: $\forall a, b \in R : a \cdot b = b \cdot a$
- Nullteilerfreier Ring: R hat keine Nullteiler: $\forall a, b \in R \setminus \{0\} : a \cdot b \neq 0$
- Charakteristik von R: $char(R) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 1_R \neq 0_R \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_R = 0\} & \text{, sonst} \end{cases}$

1.7 Polynom p in einer Unbestimmten X (Def. 2.30)

- $p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$
- Koeffizienten $a_i \in R$

- Polynomring $R[X] := \{\text{Polynome in } X \text{ über } R\}$

1.8 Körper $(K, +, \cdot)$ (Def. 2.33)

- Ring $(K, +, \cdot)$
- Abelsche Gruppe $(K \setminus \{0\}, \cdot)$

- $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ ist ein Körper, wenn p eine Primzahl ist

1.9 K-Vektorraum V (Def. 3.1)

- Körper K
- Menge V
- Zwei abgeschlossene Verknüpfungen: + (Addition) und $\cdot$ (skalare Multiplikation)
- Abelsche Gruppe $(V, +)$
- Distributivität: $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall v, w \in V : \quad (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \quad \wedge \quad \alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- Assoziativität: $\forall \alpha, \beta \in K \wedge \forall v \in V : \quad \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$
- Erhaltung des neutralen Elements: $\forall v \in V : 1_K \cdot v = v$

- Vektoren $v \in V$
- Skalare $\alpha \in K$
- Nullvektor (NE) $0 \in V$
- Nullraum bzw. trivialer VR $V := \{0\}$ mit Basis $(\emptyset) = (\{\})$

1.10 K-Untervektorraum $U \subset V$ (Def. 3.5)

- Nicht-leere Teilmenge $U \subset V$
- Abgeschlossenheit: $\alpha \in K \wedge v, w \in U \implies \alpha \cdot v \in U \wedge v + w \in U$

1.11 Summe $U_1 + U_2$ von Untervektorräumen (Def. 3.30)

- Untervektorräume $U_1 \subset V$ und $U_2 \subset V$
- $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \mid u_i \in U_i\} = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$

- Direkte Summe $U_1 \oplus U_2$: $\forall u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : u_1 + u_2 = 0 \implies u_1 = u_2 = 0$
- Komplement U_2 von U_1: Direkte Summe $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 = V$
- Dimensionsformel: $\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

1.12 K-Lineare Abbildung bzw. Homomorphismus $f : V \to W$ (Def. 4.1)

- Linearität: $\forall \lambda \in K \wedge \forall v, w \in V : \quad f(v + w) = f(v) + f(w) \ \wedge \ f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

- $\mathrm{Hom}_K(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$
- $\mathrm{Aut}_K(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ Automorphismus}\}$
- f injektiv $\iff \ker(f) = 0$
- $\mathrm{Rang}(f) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(f(V))$
- $\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{Rang}(f)$

1.13 Dualraum V^* von V (Def. 4.5)

- $V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{f : V \to W \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$
- Punktweise Addition: $\forall f, g \in V^* \wedge v \in V : \quad (f + g)(v) = f(v) + g(v)$
- Punktweise skalare Multiplikation: $\forall f \in V^* \wedge \forall \lambda \in K \wedge v \in V : \quad (\lambda \cdot f)(v) = \lambda \cdot f(v)$

- K-Linearformen $\varphi \in V^*$
- Zu f duale Abbildung $f^* : W^* \to V^*, \varphi \mapsto (\varphi \circ f : V \to K)$, d.h. $f^*(\varphi)(v) = \varphi(f(v))$
- Duale Basis $(b_1^*, \ldots, b_n^*)$ von V^* zur Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von V wird definiert durch: $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$

1.14 Abbildungsmatrix bzw. darstellende Matrix $D_{CB}(f) \in K^{m \times n}$ (Def. 4.28)

- Lineare Abbildung $f : V \to W$
- Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und Basis $C = (w_1, \ldots, w_m)$ von W
- Kommutative Abbildung $\overline{f} : K^n \to K^m, x \mapsto \overline{f}(x) = D_{CB}(f) \cdot x = (\beta_C^{-1} \circ f \circ \beta_B)(x)$
- $D_{CB}(f) = \big(\overline{f}(e_1) \mid \ldots \mid \overline{f}(e_n)\big) = \big(\beta_C^{-1}(f(v_1)) \mid \ldots \mid \beta_C^{-1}(f(v_n))\big)$

- Darstellungsmatrix der dualen Abbildung $D_{B^* C^*}(f^*) = (D_{CB}(f))^T$

1.15 Invertierbare Matrix $A \in K^{n \times n}$

- Eine Matrix ist invertierbar, gdw.:
- Inverses: $\exists B \in K^{n \times n} : AB = BA = I_n$
- $\mathrm{Rang}(A) = n$

- Das Inverse erhält man durch Gaußen von: $(A \mid I_n) \rightsquigarrow \big(I_n \mid A^{-1}\big)$

1.16 Äquivalenz von Matrizen (Def. 4.45)

- Zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ heißen äquivalent:
- $\exists S \in K^{n \times n} \wedge \exists T \in K^{m \times m} \wedge S, T$ invertierbar : $B = T \cdot A \cdot S$
- $\iff$ Rang$(A) =$ Rang(B)

1.17 Ähnlichkeit von Matrizen (Def. 4.47)

- Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen ähnlich:
- $\exists T \in K^{n \times n} \wedge T$ invertierbar : $B = T \cdot A \cdot T^{-1}$

1.18 General Linear Group $GL_n(K)$ (Def. 4.45 o.ä.)

- $GL_n(K) := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$
- Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation: $(GL_n(K), \cdot)$

1.19 Special Linear Group $SL_n(K)$

- $SL_n(K) := \{A \in K^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$
- Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation: $(GL_n(K), \cdot)$

1.20 Determinante (Def. 5.1)

- $\det : K^{n \times n} \to K, A \mapsto \det(A)$
- det ist linear in jeder Zeile
- Rang$(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$
- $\det(I_n) = 1$

- A obere Dreiecksmatrix: $\det(A) = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(f) = \det(D_{BB}(f))$ mit beliebiger Basis B

1.21 Eigenvektor v von f zum Eigenwert λ (Def. 6.1)

- Endomorphismus $f : V \to V$
- Eigenvektor $v \in V \setminus \{0\}$ und Eigenwert $\lambda \in K : f(v) = \lambda \cdot v$

- Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda id_V) = 0$
- Eigenraum $E_\lambda := \ker(f - \lambda id_V)$
- Geometrische Vielfachheit des EW λ: $\dim(E_\lambda)$
- Algebraische Vielfachheit des EW λ: n-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

1.22 Diagonalisierbarkeit von Matrizen (Def. 6.1)

- Eine Matrix A bzw. ein Endomorphismus f ist diagonalisierbar, gdw.:
- Es existiert eine Basis aus Eigenvektoren
- Die Matrix ist zu einer Diagonalmatrix ähnlich
- $f : V \to V$ mit $dim(V) = n$ hat n verschiedene Eigenwerte
- Charakt. Polynom zerfällt in Linearfaktoren, alg. und geom. Vielfachheit jedes EW stimmen überein