Lineare Algebra - Zusammenfassung

Diese Zusammenfassung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit oder Korrektheit.
Teilweise wurden Erklärungen der Variablen o.ä. aus Platzgründen weggelassen. (z.B. $a, b \in G$, $\forall x \in X$ o.ä.)
Solltet ihr Fehler finden oder Ergänzungen haben, teilt sie mir bitte mit: richard.gebauer@student.kit.edu

1 Lineare Algebra I

1.1 Abbildungen

$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$ mit Definitionsbereich X und Wertebereich Y
Bild von $A \subset X$: $f(A) = \{f(x)|x \in A\}$, Urbild von $B \subset Y$: $f^{-1}(B) = \{x \in X|f(x) \in B\}$
Komposition (von $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$): $g \circ f : X \to Z, x \mapsto g(f(x))$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Injektivität: } \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{Surjektivität: } f(X) = Y \text{ bzw. } \forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y\end{array}\right\} \text{Bijektivität}$$

f bijektiv: Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X, f(x) \mapsto x$
Einschränkung von f auf $A \subset X$: $f_{|A} : A \to Y, x \mapsto f(x)$

1.2 Äquivalenzrelation (Def. 1.12)

Relation $\sim$ ist reflexiv ($x \sim x$), symmetrisch ($x \sim y \Rightarrow y \sim x$) und transitiv ($x \sim y$ und $y \sim z \Rightarrow x \sim z$)
Äquivalenzklasse von $x \in X$: $[x] := \{y \in X|y \sim x\}$, x heißt Repräsentant oder Vertreter von $[x]$
Quotientenmenge von X nach $\sim$: $X_{/\sim} := \{[x]|x \in X\}$ (Menge der Äquivalenzklassen)
(kanonische) Projektion $\pi : X \to X_{/\sim}, x \mapsto [x]$ (gibt zu jedem $x \in X$ die Äquivalenzklasse an)

Zerlegung einer Menge X: paarweise disjunkte Menge nicht-leerer Teilmengen von X und die Vereinigung aller Teilmengen ist ganz X

1.3 Gruppen (Def. 2.1)

Menge G mit (auf G) abgeschlossener und wohldefinierter Verknüpfung $\cdot$ ist eine Gruppe $(G, \cdot)$ wenn gilt:
Assoziativität: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, neutr. Elem.: $e \cdot a = a \cdot e = a$, inv. Elem.: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$
Gruppe heißt kommutativ oder abelsch wenn $a \cdot b = b \cdot a$

Erzeuger (Def. 2.6) $S \subset G$ erzeugt die Gruppe G wenn gilt: jedes Element in G lässt sich als Produkt von Elementen in $S \cup S^{-1}$ schreiben ($S^{-1} := \{s^{-1}|s \in S\}$)

Untergruppe (Def. 2.9) $H \subset G$, G Gruppe: $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$; $g, h \in H \Rightarrow g \cdot h \in H$; $e \in H$

Linksnebenklasse (Def. 2.12) von Untergruppe $H \subset G$ unter $g \in G$: $gH := \{gh|h \in H\}$ (Hg entspr.)
Quotient von G nach H: $G_{/H} := G_{/\sim H} = \{gH|g \in G\}$ (Menge der Linksnebenklassen, Zerlegung von G)
Untergruppe $H \subset G$ heißt Normalteiler wenn $\forall g \in G : H = g^{-1}Hg := \{g^{-1}hg|h \in H\}$

1.4 (Gruppen-)Homomorphismus (Def. 2.7)

Abbildung $f : G \to G'$ zwischen zwei Gruppen $(G, \cdot)$, $(G', *)$ und $\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) * f(h)$
Endomorphismus: Homomorphismus $G \to G$, Isomorphismus: bijektiver Homomorphismus $G \xrightarrow{\cong} H$
Automorphismus: Isomorphismus $G \to G$
Kern eines Homomorphismus($f : G \to H$): $ker(f) := f^{-1}(\{e_H\}) = \{g \in G|f(g) = e_H\}$
$ker(f) \subset H$ und $f(G) \subset H$ sind Untergruppen ; trivialer Kern: $ker(f) = e_G \iff f$ injektiv

1.5 Symmetrische Gruppe S_n (Def. 2.5)

$S_n := Bij(\{1, \dots n\}, \{1, \dots n\}) = \{f : \{1, \dots n\} \to \{1, \dots n\}|$ f bij. Abb. $\}$, Elem. $\sigma \in S_n$ heißt Permutation
Transposition $\tau(ij)$ vertauscht die zwei Zahlen i und j, lässt den Rest unverändert
Fehlstandszahl von $\sigma \in S_n$: $a(\sigma) := |\{(i, j) \in \{1, \dots n\}^2$ Fehlstand $\}|$ mit Fehlstand: $i < j \wedge \sigma(i) > \sigma(j)$

Signum $sign : S_n \to \{1, -1\}, \sigma \mapsto (-1)^{a(\sigma)}$ ist ein Gruppenhomomorphismus
Alternierende Gruppe: $A_n := ker(sign : S_n \mapsto \{1, -1\}) = \{\sigma \in S_n | sign(\sigma) = 1\}$

1.6 Ring (Def. 2.24)

Menge R, zwei Verknüpfungen (wohldefiniert und abgeschlossen) $+$ (Addition), $\cdot$ (Multiplikation)
$(R, +)$ abelsche Gruppe, $\cdot$ assoziativ & NE, distributiv: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ und $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
Ring heißt kommutativ, wenn $\cdot$ kommutativ
$a, b \in R \setminus \{0\}$ sind Nullteiler, wenn $a \cdot b = 0$; hat R keine Nullteiler, heißt R nullteilerfrei
Charakteristik von R: $char(R) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot 1_R \neq 0_R \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1_R = 0\} & \text{, sonst} \end{cases}$

Polynom in einer Unbestimmten X: $p = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ mit Koeffizienten $a_i \in R$
Grad von p: $\text{Grad}(p) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n : a_k = 0\}$, Polynomring $R[X] := \{\text{Polynome in } X \text{ über } R\}$

1.7 Körper (Def. 2.33)

Ring $(K, +, \cdot)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
$\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}_{/p\mathbb{Z}}$ ist ein Körper, wenn p eine Primzahl ist

1.8 (K-)Vektorräume (Def. 3.1)

Körper K, Menge V mit (abgeschl. und wohldef.) Addition $+$ und skalarer Multiplikation $\cdot$, sodass gilt:
$(V, +)$ abelsche Gruppe, $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$, $1_K \cdot v = v$
Vektoren $v \in V$, Skalare $\alpha \in K$, Nullvektor 0 (NE von $(V, +)$), Nullraum/trivialer VR $V := 0$

(K-)Untervektorraum (nichtleere Teilmenge) $U \subset V$: $\alpha \in K; v, w \in U \Rightarrow \alpha \cdot v \in U$, $v + w \in U$

Quotientenraum (Def. 3.8) / Faktorraum von V nach U: Quotientengruppe $V_{/U}$ bzgl. der Addition