Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $\equiv$ die Äquivalenzrelation

$$a \equiv b \iff 7 \text{ teilt } b - a$$

auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Weiter bezeichne $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\equiv$.

(a) Zeigen Sie, dass $[a] * [b] := [ab]$ eine wohldefinierte Verknüpfung auf $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\{[a] \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt nicht } a\}$$

mit der Verknüpfung $*$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $(G, \star)$ und $(H, \diamond)$ Gruppen. Zeigen Sie, dass dann die Menge $G \times H$ mit der Verknüpfung

$$(g_1, h_1) \,?(g_2, h_2) := (g_1 \star g_2, h_1 \diamond h_2)$$

auch eine Gruppe ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Für welche $r, s \in \mathbb{N}$ sind die Relationen

(a) $\{((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid r(a_1 - b_1) = s(a_2 - b_2)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

(b) $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^r \text{ teilt } b^s\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(i) reflexiv, (ii) symmetrisch, oder (iii) transitiv?

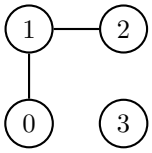
Aufgabe 4 (4 Punkte)
Ein ungerichteter Graph G besteht aus einer Menge $V(G)$ von Knoten und einer Menge $E(G) \subseteq \mathcal{P}(V(G))$ von Kanten, so dass $1 \leq |e| \leq 2$ für alle $e \in E(G)$.[1] Ein Pfad p von einem Knoten u zu einem Knoten v in einem solchen Graphen G ist ein Tupel $p = (u = x_1, \ldots, x_n = v)$, $n \geq 1$, von Knoten, so dass $\{x_i, x_{i+1}\} \in E(G)$ für alle $1 \leq i < n$. Wir definieren nun durch

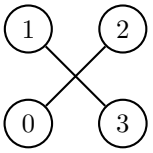
$$u \rightsquigarrow v \iff \exists \text{ Pfad } p \text{ von } u \text{ nach } v$$

eine Relation $u \rightsquigarrow v$ auf $V(G)$.

(a) Zeigen Sie, dass $\rightsquigarrow$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $V(G)$ der Knoten ist.

(b) Bestimmen Sie die Menge $V(G)/\!\rightsquigarrow$ der Äquivalenzklassen von Knoten bzgl. dieser Äquivalenzrelation für die folgenden Graphen G:





Abgabe bis spätestens Montag, den 16. 11. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!

[1] Im Gegensatz zu Aufgabe 4 auf Blatt 1 ist in dieser Definition nur maximal eine Kante zwischen je zwei Knoten zulässig.