

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien D eine natürliche Zahl und $\mathcal{O} := \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$. Weiter sei $\mathbb{R}^\times$ die Gruppe mit zugrundeliegender Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der üblichen Multiplikation reeller Zahlen als Verknüpfung. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{O} \setminus \{0\}$ ist keine Untergruppe von $\mathbb{R}^\times$.
- (b) $\mathcal{L} = \{a + b\sqrt{D} \in \mathcal{O} \mid a^2 - b^2 D = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{R}^\times$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gibt, wenn n ein Teiler von m ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Wir betrachten in dieser Aufgabe wieder die ungerichteten Graphen aus Aufgabe 4 auf Übungsblatt 3. Eine Abbildung $\Phi: G \rightarrow H$ zwischen ungerichteten Graphen G und H ist eine Abbildung $\Phi: V(G) \rightarrow V(H)$, so dass $\{\Phi(u), \Phi(v)\} \in E(H)$ für alle $\{u, v\} \in E(G)$. Ein Automorphismus von G ist eine Abbildung $\Phi: G \rightarrow G$ von Graphen, so dass es eine Abbildung $\Psi: G \rightarrow G$ von Graphen mit $\Psi \circ \Phi = \text{id}_G$ und $\Phi \circ \Psi = \text{id}_G$ gibt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\text{Aut}(G)$ der Automorphismen eines Graphen G mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe ist.

Es sei nun G der ungerichtete Graph mit $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ und $E(G) = \{e \subseteq V(G) \mid |e| = 2\}$.

- (b) Zeigen Sie, dass $\text{Aut}(G) = S_4$.
- (c) Bestimmen Sie die Menge $D = \{\{e, d\} \subseteq E(G) \mid e \cap d = \emptyset\}$.
- (d) Sei Φ ein Automorphismus von G . Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_D: D &\rightarrow D \\ \{e, d\} &\mapsto \{\Phi(e), \Phi(d)\} \end{aligned}$$

mit $\Phi(\{u, v\}) = \{\Phi(u), \Phi(v)\}$ wohldefiniert und bijektiv ist.

- (e) Geben Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $S_4 \rightarrow S_3$ an.