Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es seien D eine natürliche Zahl und

$$\mathcal{O} = \{a + b\sqrt{D} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}$ ein Teilring von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei K ein Körper mit $2 = 1 + 1 \neq 0$. Weiter seien $a \in K^\times$ und $b, c \in K$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

genau dann eine Lösung $x \in K$ besitzt, wenn es ein $d \in K$ mit

$$d^2 = b^2 - 4ac,$$

wobei $4 = 2+2$, gibt. Benutzen Sie hierbei *nicht* einfach die Lösungsformel für quadratische Gleichungen, sondern rechnen Sie nach, dass diese Formel auch tatsächlich das gewünschte Ergebnis liefert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es sei $\pi \in S_8$ durch die Wertetabelle

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\pi(n)$	2	4	5	8	6	3	7	1

gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Zykelzerlegung von π.

(b) Stellen Sie π als Produkt von Transpositionen dar.

(c) Berechnen Sie π^{2015}.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien $d \geq 1$ eine natürliche Zahl und $W = \left\{\cos\left(\frac{2k\pi}{d}\right) + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{d}\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(W, \cdot)$ eine Untergruppe von $\mathbb{C}^\times$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(W, \cdot)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, +)$ ist.

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

ohne Beweis benutzen.

Abgabe bis spätestens Montag, den 30. 11. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!