Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ die Menge aller $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
(2\lambda-1)x_2 - x_3 + (\lambda-1)x_4 &= \lambda \\
2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 3 \\
\lambda x_1 + (\lambda^2+1)x_2 - (\lambda-1)x_3 + 2\lambda x_4 &= \lambda+1 \\
x_1 + \lambda x_2 - x_3 + 2x_4 &= 1
\end{aligned}$$

lösen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, welche der Terme AB, AC, BC, $A+B$, $A+BC$ und $A+CB$ definiert sind und berechnen Sie diese.

(b) Es seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass in $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper mit unendlich vielen Elementen und $f = X^2 - 1 \in K[X]$. Für eine 2×2-Matrix $A \in K^{2\times 2}$ sei $f(A) := A^2 - I$, wobei I die 2×2-Einheitsmatrix bezeichnet. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Matrizen $A \in K^{2\times 2}$ gibt, so dass $f(A) = 0$, wobei 0 hier die 2×2-Matrix bezeichnet, in der alle Einträge $0 \in K$ sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}.$$

Zeigen Sie, dass es für $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_5$ eine Matrix $B \in K^{2\times 2}$ mit $AB = I = BA$ gibt. Gibt es solch eine Matrix $B \in K^{2\times 2}$ auch für $K = \mathbb{F}_3$?

Abgabe bis spätestens Montag, den 7. 12. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!