Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Für welche $b \in \mathbb{R}^5$ ist $Ax = b$ lösbar?

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es sei R ein Ring und $p \in \mathbb{N}$. Weiter sei $A = \sum_{i=1}^{p-1} E_{i,i+1} \in R^{p \times p}$.

(a) Schreiben Sie A für $p = 2, 3$ und 4 aus. Skizzieren Sie A für größere Werte von p.

(b) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien R ein Ring mit $1 \neq 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Für eine Permutation $\sigma \in S_p$ definieren wir durch

$$M(\sigma)(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Matrix $M(\sigma) \in R^{p \times p}$.

(a) Es sei τ die Transposition $\tau = (i \quad j) \in S_p$. Zeigen Sie, dass $M(\tau) = V_{i,j}$, wobei $V_{i,j}$ die Vertauschungsmatrix aus der Vorlesung ist.

(b) Zeigen Sie, dass $M(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} E_{\sigma(i),i}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\sigma \mapsto M(\sigma)$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus $M\colon S_p \to \mathrm{GL}_p(R)$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in K$ und $f(X) = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} a_j X^j \in K[X]$. Weiter sei B die Matrix $B \in K^{d \times d}$ mit

$$B(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i + 1 \text{ und } i < d \\ -a_{j-1} & \text{falls } i = d, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $B \cdot x = \lambda \cdot x$ genau dann eine Lösung $0 \neq x \in K^d$ besitzt, falls $f(\lambda) = 0$.
Hinweis: Es ist *nicht* nötig, das Gleichungssystem $B \cdot x = \lambda \cdot x$ durch Zeilenumformungen zu lösen.

Abgabe bis spätestens Montag, den 14. 12. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!