Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie, dass U mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + a' - 1 \\ b + b' - 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \star \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1-\lambda \\ 0 & \lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ einen reellen Vektorraum bildet.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Entscheiden Sie mithilfe des Gauß-Verfahrens, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

invertierbar ist und geben Sie gegebenenfalls die Inverse an.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien $\mathbb{R}[X]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Für ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X]$ bezeichne f' die Ableitung von f nach X. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $D\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ mit $D(f) = f'$ und $E\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ mit $E(f) = f(\lambda)$ Homomorphismen von Vektorräumen sind.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper und $A \in K^{p\times q}$ eine Matrix von Rang r. Zeigen Sie:

(a) Es gibt Matrizen $L \in \mathrm{GL}_p(K)$ und $R \in \mathrm{GL}_q(K)$, so dass $LAR = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$.

(b) Es gibt eine Matrix $B \in K^{q\times p}$ mit $ABA = A$.

(c) Für die Matrix B aus Teil (b) gilt: Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für ein $b \in K^p$ ist genau dann lösbar, wenn $ABb = b$. In diesem Fall ist die Lösungsmenge $L(A, b) = \{y - BAy + Bb \mid y \in K^q\}$.

Abgabe bis spätestens Montag, den 21. 12. 2015, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!