Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Algebra und Geometrie
Prof. Dr. Claus-Günther Schmidt
PD Dr. Stefan Kühnlein
Dr. Jingwei Zhao, Tobias Columbus

Lineare Algebra und Analytische Geometrie I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Es sei $B = \{e_1, e_2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Für einen Vektor $u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ mit $u_1^2 + u_2^2 = 1$ definieren wir die lineare Abbildung s_u durch lineare Fortsetzung der Vorschrift

$$s_u(e_1) = \begin{pmatrix} u_1^2 - u_2^2 \\ 2u_1 u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad s_u(e_2) = \begin{pmatrix} 2u_1 u_2 \\ u_2^2 - u_1^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Überzeugen Sie sich anhand einer Skizze davon, dass die Abbildung s_u die Spiegelung an der Geraden $\{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist.

Es seien nun $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u = \cos(\alpha/2)\, e_1 + \sin(\alpha/2)\, e_2$.

(b) Zeigen Sie, dass es einen Vektor $v = v_1 e_1 + v_2 e_2 \in \mathbb{R}^2$ mit $v_1^2 + v_2^2 = 1$ gibt, so dass $s_v \circ s_u$ bzgl. der Standardbasis B des $\mathbb{R}^2$ die Darstellungsmatrix

$$D_{B,B}(s_v \circ s_u) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

besitzt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis geometrisch.

Hinweis: Sie dürfen die Additionstheoreme aus Aufgabe 4 auf Blatt 5 wieder ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es seien $M_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ der reelle Vektorraum der 2×2-Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$, sowie $X \in M_2$ und $E = \{E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\}$ die Basis von M_2 aus Elementarmatrizen. Weiter seien

$$Z_2 := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad S_2 := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2 \;\middle|\; a + d = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $\kappa_X \colon M_2 \to M_2$, $Y \mapsto XY - YX$, linear ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $D_{E,E}(\kappa_X)$ von κ_X bezüglich der Basis E.

(b) X kommutiert genau dann mit allen $Y \in M_2$, d. h. $XY = YX$, wenn $X \in Z_2$.

(c) $S_2 = \{XY - YX \mid X, Y \in M_2\}$.

(d) $M_2 = Z_2 \oplus S_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\Phi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt eine aufsteigende Kette

$$0 = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_n = V$$

von Untervektorräumen von V, so dass $\dim U_i = 1 + \dim U_{i-1}$ und $\Phi(U_i) \subseteq U_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(ii) Es gibt eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V, so dass die Darstellungsmatrix $D_{B,B}(\Phi) = (d_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ von Φ bzgl. B eine obere Dreiecksmatrix ist, d. h. $d_{i,j} = 0$ für $i > j$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Es seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Weiter bezeichne $p\colon V \to V/U$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(a) $p^*\colon (V/U)^* \to V^*$ ist injektiv.

(b) $\mathrm{Bild}(p^*) = \{\lambda \in V^* \mid \lambda|_U = 0\}$.

(c) $V^*/\,\mathrm{Bild}(p^*) \cong U^*$.

Abgabe bis spätestens Montag, den 25. 01. 2016, um 13:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungsvorschläge in die gelben Einwurfkästen im Foyer von Gebäude 20.30. Abgabe zu zweit ist möglich und erwünscht. Bitte geben Sie Ihren Namen, Matrikelnummer und die Nummer Ihres Tutoriums an!